

§1. 分岐被覆] 120分

§2. 曲面ブレイド]

§3. 不变量 1] 120分

§4. 不变量 2]

§1. $F, M : 2 - \text{mfld}$

Def 1.1 写像 $f: F \rightarrow M$ が 次数 m の分岐被覆 (branch cov. of deg. m)

: $\Leftrightarrow \exists \Sigma \subset M$: finite set s.t.

- (1) $f|_{F \setminus f^{-1}(\Sigma)}: F \setminus f^{-1}(\Sigma) \rightarrow M \setminus \Sigma$ は m 次被覆
- (2) $\forall x \in f^{-1}(\Sigma)$ に付いて f は x のまわりで、局所的には、
0 のまわりの写像 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto z^k$ ($\exists k \in \mathbb{Z}_{(>0)}$) に同値

$$F = \begin{matrix} \times & \times \\ \times & \times \\ \vdots & \vdots \\ \times & \times \end{matrix}^m$$

$$M = \begin{matrix} \times & \times \\ \times & \times \end{matrix}$$

(2) \Leftrightarrow 次の条件を満たす $U_x \subset F, V_{f(x)} \subset M$ が存在すること

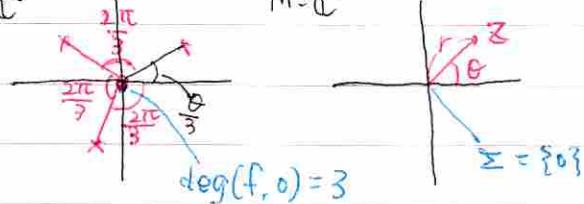
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{条件} \\ \hline \begin{array}{ll} \text{(1)} & U_x \cap V_{f(x)} \cong \mathbb{C} \\ \text{(2)} & U_x \xrightarrow{\exists h_1 \cong} \mathbb{C} \quad h_1(x) = 0 \\ & f|_{U_x} \downarrow \quad \downarrow \\ & V_{f(x)} \xrightarrow{\exists h_2 \cong} \mathbb{C} \quad h_2(f(x)) = 0 \end{array} \end{array} \right. \quad \text{: open n.b.d.}$$

$q_x := \deg(f, x)$
x の分岐指数

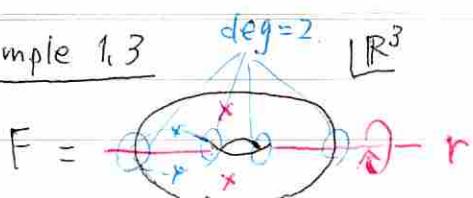
Example 1.2 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto z^3$

$$F = \mathbb{C}$$

$$M = \mathbb{C}$$



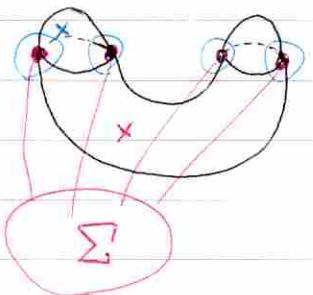
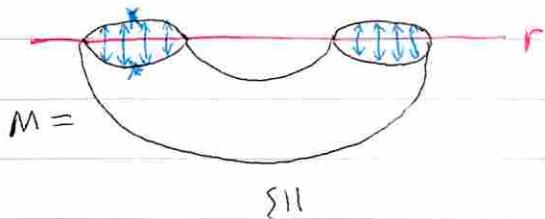
Example 1.3



$R : r$ を軸とする \mathbb{R}^3 の 180° 回転

$$f := R|_F$$

$$M := F/\sim \quad \leadsto \quad F \rightarrow M \text{ は } 2\text{ 次の分岐支被覆}$$



$f : F \rightarrow M$: branch cov., deg m

$x \in F$ の指數

$$\deg(f; x) := \begin{cases} 1 & x \in F \setminus f^{-1}(z) \\ q_x & x \in f^{-1}(z) \end{cases}$$

• x が f の特異点 : $\Leftrightarrow \deg(f; x) > 1$

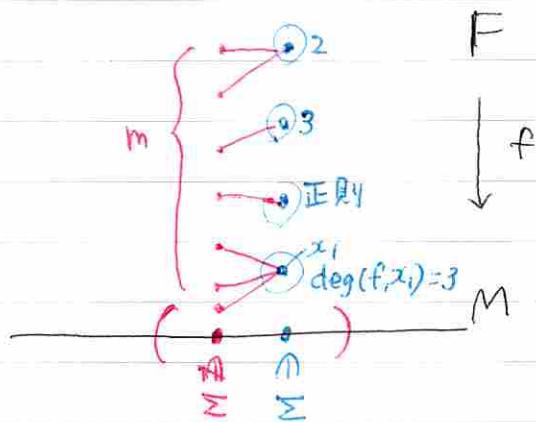
“ 正則点 ” : $\Leftrightarrow \deg(f; x) = 1$

• $y \in M$ が f の分岐点 : $\Leftrightarrow \exists x \in f^{-1}(y)$ s.t. x は特異点

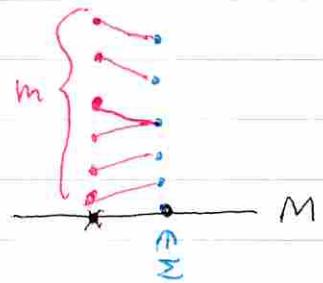
“ 正則点 ” : \Leftrightarrow それ以外

以後、 $\Sigma := \{M \text{ の分岐点}\}$

Remark 1.4 $y \in \Sigma$, $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_l\}$ とする
 $\Rightarrow \sum_{i=1}^l \deg(f; x_i) = m$ 分歧 cov. の次数



Def 1.5 m 次分歧 cov. $f: F \rightarrow M$ が simple
 $\Leftrightarrow \forall y \in \Sigma, \#(f^{-1}(y)) = m - 1$



§2. 曲面グレイド

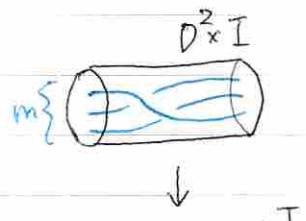
(クラシカルなグレイド)

D^2 : 2-disk

$I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$

$g: D^2 \times I \rightarrow I$: 自然な projection

$\begin{matrix} \text{II} \\ D^3 \end{matrix}$



$b: 1-mfd$ in $D^2 \times I (\cong D^3)$

b が m 次のグレイド

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1A) g|_b$ は m 次の被覆写像
 $(1B) b \cap \partial(D^2 \times I) = \partial b$ かつ $\partial b = \underbrace{\mathbb{Q}_m \times \partial I}_{\text{Int } D^2 \cup \{0, 1\}}$ m の点の集合 \end{cases}

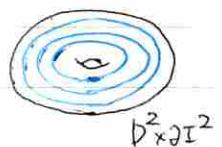
$p: D^2 \times I^2 \rightarrow I^2$: 自然な射影

S : 向きづけ可能な曲面 in $D^2 \times I^2$
コンパクト

$\cong D^4$

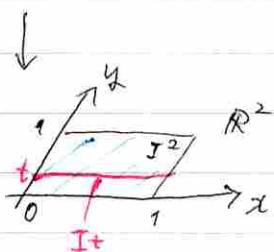
Def 2.1. S が 次数 m の曲面ブレイド

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2A) p|_S$ が "次数 m の simple 分岐被覆
 (2B) $S \cap \partial(D^2 \times I^2) = \partial S$ かつ $\partial S = Q_m \times \partial I^2$ \end{cases}

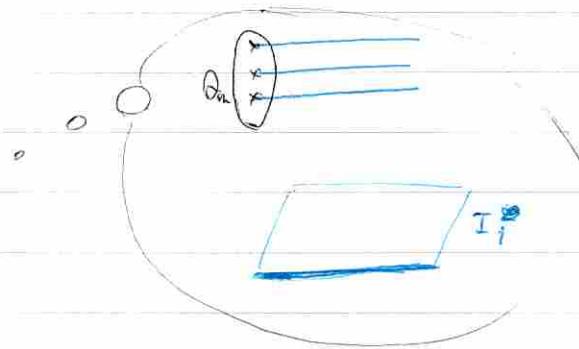
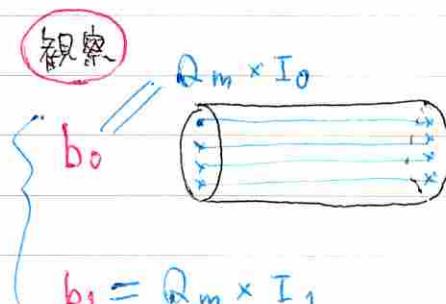


モーションヒープル

S : 次数 m の曲面ブレイド $\subset D^2 \times I^2$



ここで、 $\{p^{-1}(I_t) \cap S\}_{t \in I}$ を
 S の モーションヒープル という。



$$b_t = Q_m \times I_t$$

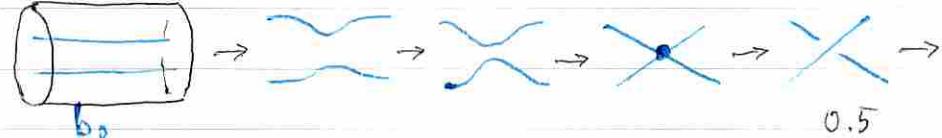
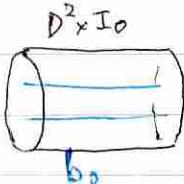
$D^2 \times I_t$

I_t カ分岐点 $\Rightarrow b_t$ は m 次のブレイド

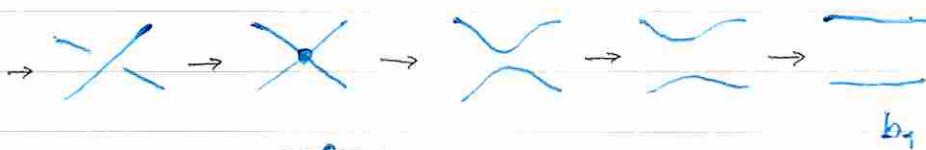
I_t 2分岐点 $\Rightarrow b_t$ は 特異ブレイド

Example 次は次数2の曲面ブレイドのモーションピクチャー

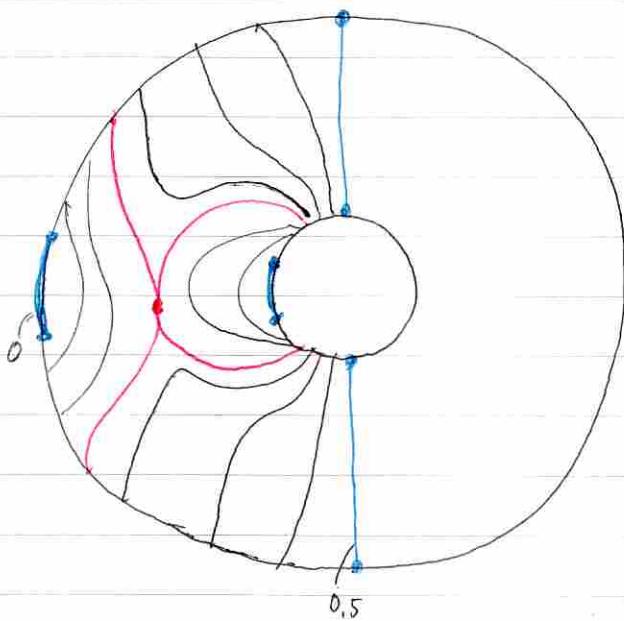
(これは実は
アニュラスではありません)



0.5

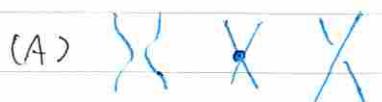
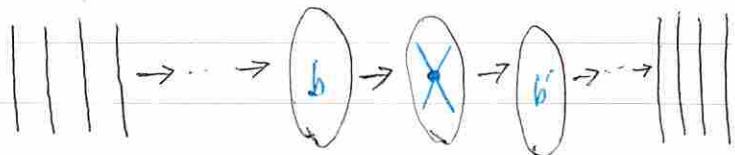


b_1

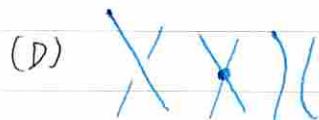
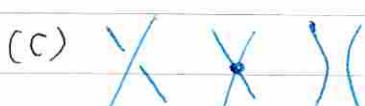


0.5

今、 $S \# m$ 次の曲面ブレイド



• (A), (D) を 正の 特異点



• (B), (C) を 負の ◇

Prop ~~b~~ $b = \tau_{i_1}^{s_1} \cdots \tau_{i_\ell}^{s_\ell} \Rightarrow e(b) := \sum_{i=1}^{\ell} s_i$ ブレイドの表し方によらない!!

$$(A), (D) \Rightarrow e(b) + 1 = e(b')$$

$$(B), (C) \Rightarrow e(b) - 1 = e(b')$$

$$B_n < \tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_{n-1}} \quad \begin{aligned} \tau_i \tau_j \tau_i &= \tau_j \tau_i \tau_i & (|i-j|=1) \\ (\text{A: 次ブレイド群}) \quad \tau_i \tau_j &= \tau_j \tau_i & (|i-j|>1) \end{aligned}$$

Prop S : 曲面ブレイド

$$(1) \# \{ \text{positive singular} \} = \# \{ \text{negative singular} \}$$

$$(2) \#(\Sigma) \text{ は偶数}$$

?: (1)

$$\begin{array}{c|c|c} \hline & t=0 & t=1 \\ \hline \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{array} & \rightarrow 0 & \rightarrow 0 \rightarrow \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{array} \\ \hline \end{array}$$

S, S' : 曲面ブレイド

$$p: D^2 \times I^2 \rightarrow I^2$$

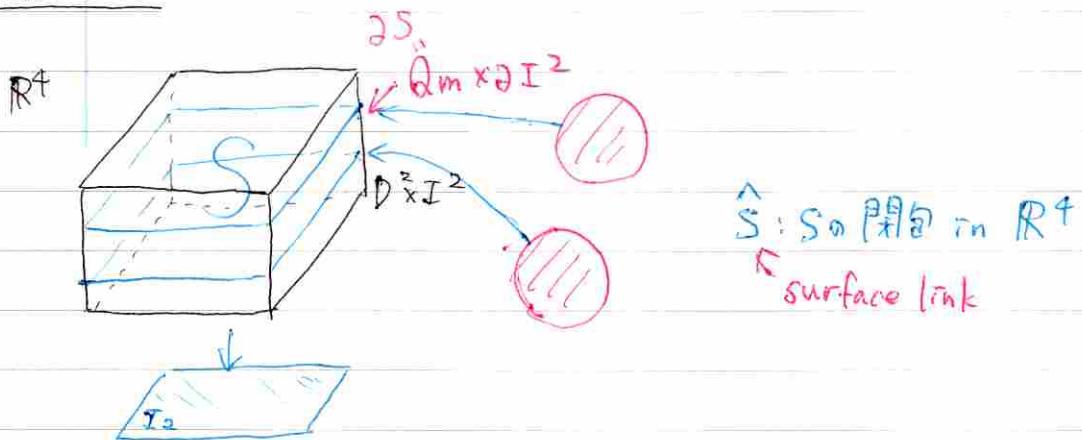
Def $S \sim_{\text{equivalent}} S' : \Leftrightarrow \exists \{ h_u \}_{u \in I}: D^2 \times \partial I^2 \ni \text{アビエントイント}^0$

- $s, t,$
- $$\left\{ \begin{array}{l} (1) h_0 = id, h_1(s) = s' \\ (2) h_u |_{D^2 \times \partial I^2} = id \quad (\forall u \in I) \\ (3) \forall u \in I \quad \exists h_u: I^2 \rightarrow I^2; \text{homeo} \quad s.t. \quad p \circ h_u = h_u \circ p \end{array} \right.$$

曲面ブレイドの不変量

- ① 曲面ブレイドの次数 $= m$
- ② 分岐点の数 $= n$
- ③ オイラー数 (S_0) $m-n$
- ④ $\{\text{ブレイド}\}/\text{Hurwitz 同値}$ 完全不変量
- ⑤ $\{\text{ブレイド}\}/\text{c-move}$

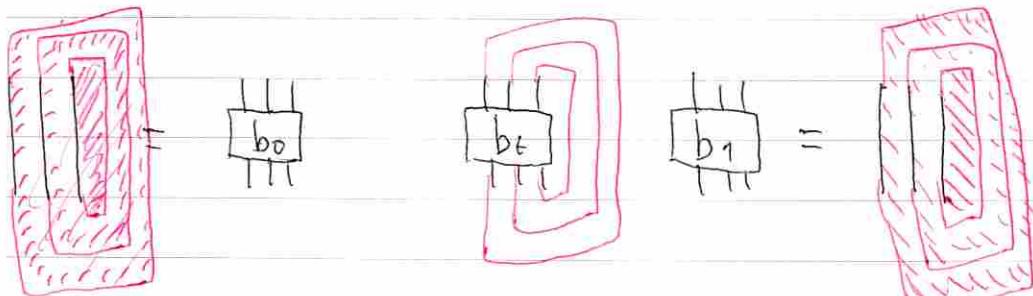
S: 曲面ブレイド

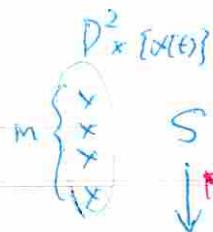


Thm [Viro]

$\forall F$: 向きづけ可能な surface link in R^4

$\exists S$: (simple な) 曲面ブレイド s.t. $F \cong \hat{S}$





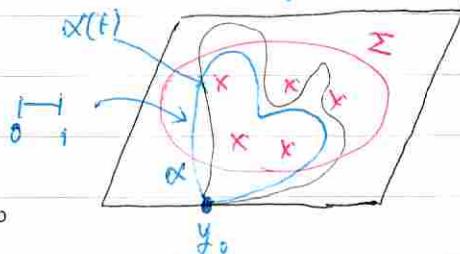
§3 ブレイド・システム

S : 次数 m の曲面ブレイド

$\Sigma \subset \text{Int } I^2$: S の分歧点の集合

$y_0 \in I^2$

α, y_0 を基点とする $I^2 \times \Sigma$ 内のループ

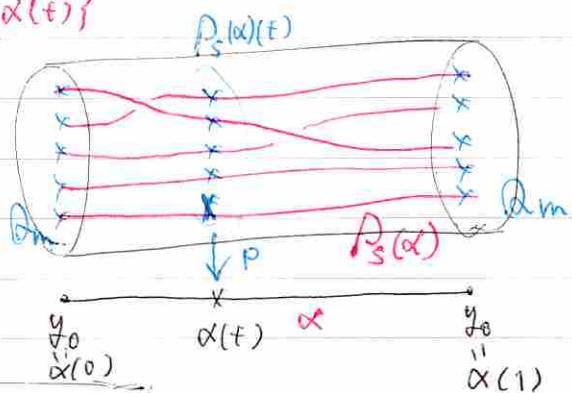


$$\rho_s(\alpha)(t) := p^{-1}(\alpha(t)) \wedge S \subset D^2 \times \{\alpha(t)\}$$

m つの S のブレイド

$$\rho_s(\alpha) := \coprod_{0 \leq t \leq 1} \rho_s(\alpha)(t)$$

$$\coprod_{0 \leq t \leq 1} (D^2 \times \{\alpha(t)\}) \subset D^2 \times I$$



Prop $\alpha \cong \alpha'$ ($\text{ループ} \alpha$ と α' はモトト等しい)

$$\Rightarrow \rho_s(\alpha) \cong \rho_s(\alpha') \subset I^2 \setminus \Sigma$$

$$(bs)_* : \pi_1(I^2 \setminus \Sigma, y) \rightarrow B_m \downarrow : \text{準同型}$$

S のブレイドモノドロミー

$$[\alpha] \longmapsto [\rho_s(\alpha)]$$

★ S のブレイドシステムを定義しよう。

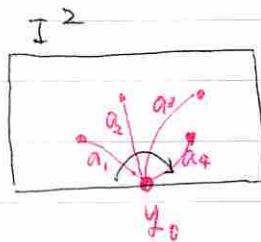
$\Sigma : S$ の分歧点の集合

y_0 を基点とする

Step 1 Σ のアーリクシステム $\Delta := (a_1, \dots, a_n)$

$$\#(\Sigma) = n$$

ex
(n=4)



単純

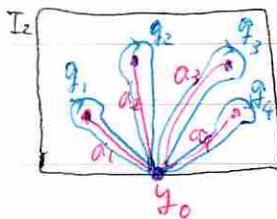
- $a_i : y_0 \in \Sigma$ の 1 点を発するアーリク

- $a_i \cap a_j = \{y_0\}$ ($i \neq j$)

- y_0 のまわりに a_1, \dots, a_n はこの順序で時計まわり

Step 2 Δ に付随する $\pi_1(I^2 \setminus \Sigma)$ の生成元システム $\mathcal{G}_{\Delta} := (g_1, \dots, g_n)$ 並ぶ

I^n



Step 3 Δ に付随する S のブレイドシステム

$$b_{S\Delta} := ((b_S) * ([g_1]), \dots, (b_S) * ([g_n]))$$



△

$$B_m^n = \underbrace{B_m \times \cdots \times B_m}_n$$

Δ の n に依存する
(n は枝数)

→ たとえば、Hurwitz 同値では一意的

$$G^n := \underbrace{G \times \cdots \times G}_n \quad \vec{g}, \vec{g}' \in G^n$$

Def 3.2 \vec{q} 及 \vec{q}' 為 Hurwitz 同值 ($\vec{q} \sim_{\text{Hur}} \vec{q}'$)

$\Leftrightarrow \vec{g} \in \vec{g}'$ が 2 次の変形 R_i, R_i^{-1} ($i=1, \dots, n-1$) の

有限列で多く合はれ。

$$R_i : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \tilde{x}_{i+1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$$

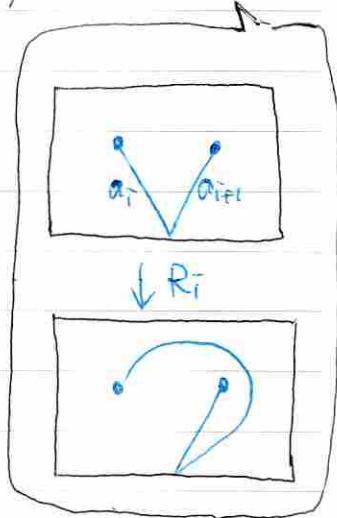
$$R_i^{-1} : (\cdots) \mapsto (\cdots, x_{i+1}x_i^{-1}, x_i, \cdots)$$

s, s' : 曲面ブレイド with Σ, Σ'

$\Delta, \Delta' : \Sigma, \Sigma'$ の任意の λ -カスケード

Thm 3.3 [S. Kamada]

$$S \underset{\text{equ}}{\sim} S' \Leftrightarrow \overbrace{bs, \alpha}^{\text{Hur}} \sim \overbrace{bs', \alpha'}^{\text{Hur}} \quad (G = B_m)$$



• $\overrightarrow{bs}, A \in B_m^n$ の特徴 "it"

$$X_m := \{ \beta^{-1} \tau_i^\varepsilon \beta \mid \beta \in B_m, \quad \varepsilon \in \{\pm 1\} \}$$

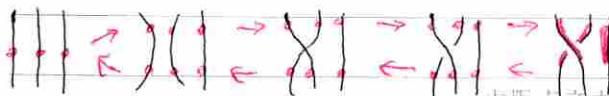
$$P^n(X_m) := \left\{ (b_1, \dots, b_n) \in B_m^n \mid \begin{array}{l} b_1 \cdots b_n = id_{B_m} \\ b_1, \dots, b_n \in X_m \end{array} \right\}$$

n: 偶数

Thm 3, 4 [S. Kamada]

$$b \in P^n(x_m)$$

$$(2) \forall \vec{b} \in P^n(X_m), \exists s, \forall s, t, \vec{b} = \overrightarrow{bs, at}$$



$\square \text{ 二-2 } n: \text{ 偶数}$

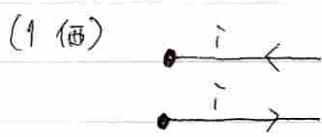
$\vec{b}, \vec{c} \in P^n(X_n)$ に対して, $\vec{b} \underset{\text{Hur}}{\sim} \vec{c}$ かどうか判定する.

§4 4b-t (今 $m \geq 2$ とする)

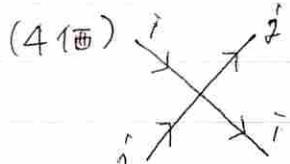
Def 4.1 Int I^2 の中の有限グラフ Γ が m -4b-t : \Leftrightarrow

(i) 各辺は $\begin{cases} \text{向きつけられてる} \\ \cdot \{1, \dots, m-1\} \text{でラベル付けされている} \end{cases}$

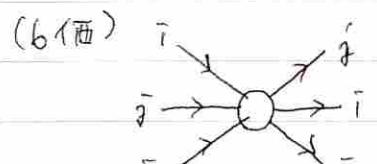
(ii) 各頂点は次のいずれかである.



black
vertex



$|i-j| > 1$
crossing

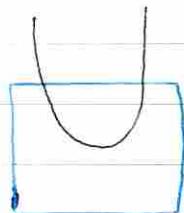
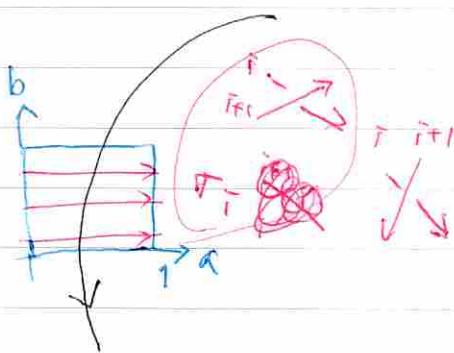


$|i-j|=1$
white vertex

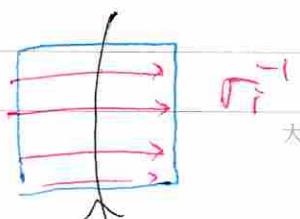
m -4b-t \rightarrow m 次の曲面ブレイド

(I-1)

(II)



資料1, 2



$$\{m - 4t - k\} / \sim_{c\text{-move}} \xrightleftharpoons{1:1} \{m \text{次の} \begin{cases} \text{曲面ブレイド} \end{cases}\} / \sim_{\text{equ}}$$

資料3

資料4

$$\frac{\Gamma}{4t-t} \rightarrow \overrightarrow{bp}$$

$\Gamma, \Gamma' : 4t-t$

$$\Gamma \underset{c\text{-move}}{\sim} \Gamma' \Rightarrow \overrightarrow{bp} \underset{\text{Hur}}{\sim} \overrightarrow{bp'}$$