櫻井 みぎ和 (東京女子大学)

A new invariant for virtual knots and forbidden moves

1 Introduction

1.1 Virtual knots and flat virtual knots

- real crossing だけでなく，virtual crossing も持つ link diagram を *virtual link diagram* という．

virtual crossing real crossing

- virtual link diagram の全ての real crossing の上下の情報を除いた diagram を，*flat virtual link diagram* といい，real crossing d の上下を除いた crossing を flat crossing といい，$\tilde{d}$ で表す．

real crossing flat crossing

- generalized Reidemeister move(図 1) の real crossing を全て flat crossing にした move を flat generalized Reidemeister move という．

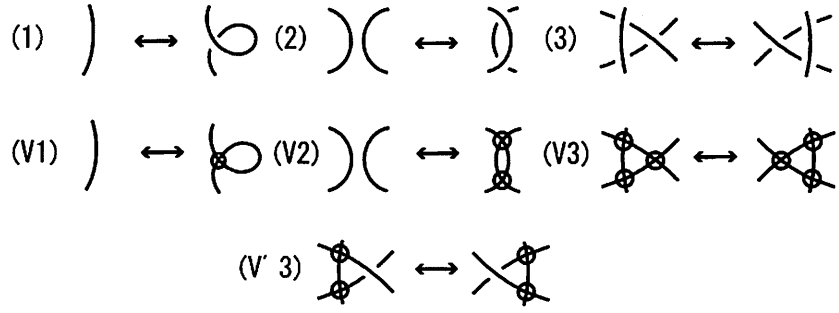


図 1 GRM

- K_1, K_2 : (flat) virtual link diagrams

  $K_1 \cong K_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} K_1$ と K_2 は有限回の (flat) generalized Reidemeister move を施して移り合う．

- $\mathcal{K}$:={All (flat) virtual link diagrams}

  $K(\in \mathcal{K}/\cong)$ を (flat) virtual link という.

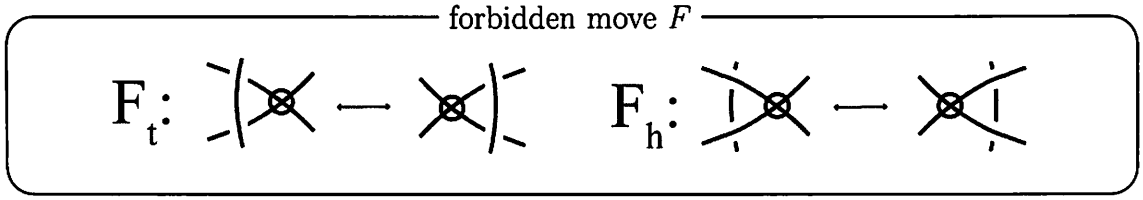
1.2 Local moves

- virtual knot diagram における local move で，有限回繰り返し施すことにより，任意の virtual knot diagram を trivial knot diagram に移す変形を，*unknotting operation* という.

- K, K' : virtual knots

  M : a local move

  K から K' を得るのに必要な M の最小回数を，M による K と K' の *distance* といい，$d_M(K, K')$ で表す．特に，K' が trivial knot のとき，K と K' の distance を *unknotting number* といい，$u_M(K)$ で表す.



2 Application

K	$u_F(K)$	K	$u_F(K)$	K	$u_F(K)$	K	$u_F(K)$
0.1	0	4.17	1	4.37	3	4.63	2
2.1	1	4.18	1	4.39	1	4.64	1
3.1	1	4.21	2	4.40	1	4.73	2
3.2	1	4.22	1	4.43	2	4.74	1
3.3	2	4.23	1	4.45	2	4.80	3
4.1	2	4.25	2	4.48	3	4.82	3
4.3	2	4.28	2	4.50	1	4.89	4
4.4	1	4.29	2	4.52	1		
4.5	1	4.32	1	4.53	2		
4.7	2	4.33	1	4.54	1		
4.11	2	4.35	1	4.57	1		
4.15	2	4.36	2	4.60	1		

表 1 unknotting number

[1] Jeremy Green, A Table of Virtual Knots, http://www.math.toronto.edu/drorbn/Students/GreenJ/

Virtual knots with up to 3 crossings

0.1 2.1 3.1 3.2 3.3 3.4 3.5 3.6 3.7

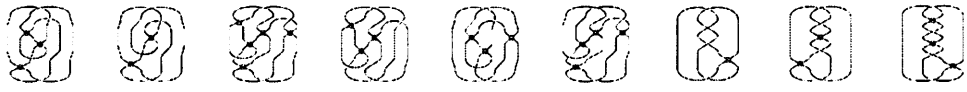
Virtual knots 4 crossings

4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6 4.7 4.8 4.9

4.10 4.11 4.12 4.13 4.14 4.15 4.16 4.17 4.18

4.19 4.20 4.21 4.22 4.23 4.24 4.25 4.26 4.27

4.28 4.29 4.30 4.31 4.32 4.33 4.34 4.35 4.36



4.37 4.38 4.39 4.40 4.41 4.42 4.43 4.44 4.45

4.46 4.47 4.48 4.49 4.50 4.51 4.52 4.53 4.54

4.55 4.56 4.57 4.58 4.59 4.60 4.61 4.62 4.63

4.64 4.65 4.66 4.67 4.68 4.69 4.70 4.71 4.72

4.73 4.74 4.75 4.76 4.77 4.78 4.79 4.80 4.81

4.82 4.83 4.84 4.85 4.86 4.87 4.88 4.89 4.90

4.91 4.92 4.93 4.94 4.95 4.96 4.97 4.98 4.99

4.100 4.101 4.102 4.103 4.104 4.105 4.106 4.107 4.108

表 2 : Virtual Knot Table[1]

櫻井 みぎ和 (東京女子大学)

2 and 3-variations and finite type invariants of degree 2 and 3

3 Introduction

3.1 Diagrams and equivalence classes

- $I_k := [0,1]\ (k = 1, \ldots, \mu)$

  $f : I_1 \amalg \cdots \amalg I_\mu \to \mathbb{R} \times [0,1]$: an immersion s.t.

  1. $t \in \partial I_k$ に対して,
  $$f(t) = \begin{cases} (k,0) & (t=0) \\ (k,1) & (t=1). \end{cases}$$
  2. f は transversal な double point のみを持つ.
  3. 各 double point には, real crossing か virtual crossing の情報が与えられている.

  $f(I_1 \amalg \cdots \amalg I_\mu)$ を *μ-component virtual string link diagram* といい, virtual string link diagram の generalized Reidemeister move による同値類を virtual string link という.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$: a smooth immersion s.t.

  1. 十分大きな $M \in \mathbb{R}$ に対して, $f(t) = (t,0)\ (t < -M, M < t)$.
  2. f は transversal な double point のみを持つ.
  3. 各 double point には, real crossing か virtual crossing の情報が与えられている.

  $f(\mathbb{R})$ を *long virtual knot diagram* といい, long virtual knot diagram の generalized Reidemeister move による同値類を long virtual knot という.

- K : virtual knot diagram,virtual string link diagram or long virtual knot diagram

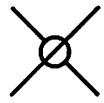
  D は, K の Gauss diagram

  $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ D は K の逆像で, K の real crossing に対応する 2 点を chord で結んだもの. 各 chord には, under crossing に向かう矢印で real crossing の上下の情報を与え, sign も与える.

  D, D' : Gauss diagrams

  $D' \subset D \overset{def}{\Leftrightarrow}$ D' の全ての chord は D の chord である.

3.2 Finite type invariants



semi-virtual crossing

semi-virtual crossing と他の crossing との $\mathbb{Z}$ 加群における関係式：

K : a (long) virtual knot diagram
$(d_1, d_2, \ldots, d_n)$: K の real crossing
$\delta := (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)\,(\delta_i = 0, 1)$
$|\delta|$: δ の 1 の個数
K_δ : $\delta_i = 1$ の時，K の crossing d_i を virtual crossing に置き換えて得られる diagram

$$\sum_{\delta}(-1)^{|\delta|}K_\delta$$

を n 個の semi-virtual crossing を持つ diagram という．

定義

G : an abelian group
$\mathcal{K}$:={All (long) virtual knots}
$v : \mathcal{K} \to G$
v を $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ に線形に拡張する．
K^m : m 個の semi-virtual crossing を持つ diagram

$$v(K^m) = 0 \ \ ({}^\forall m > n)$$

を満たす最小値 n が存在するとき，v を degree n の *finite type invariant* という．

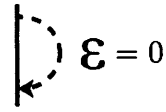
4 Arrow diagrams

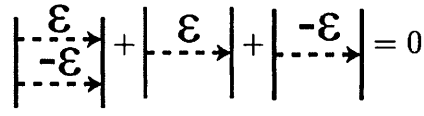
- 異なる 2 点をつなぐ dashed arrow を持つ oriented circle(or line) を *arrow diagram* という．
- $\mathcal{A}$: a free abelian group generated by all arrow diagrams

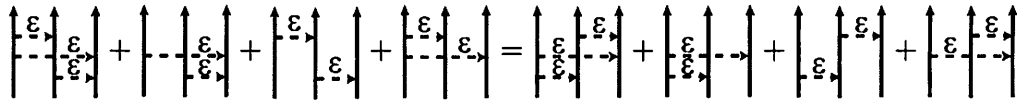
  $\mathcal{D}$:={All Gauss diagrams}

$$I : \mathcal{D} \to \mathcal{A} \text{ s.t. } I(D) = \sum_{D' \subset D} A_{D'}$$

, where $A_{D'}$ は D' の全ての chord を dashed arrow に変えた arrow diagram.

-  (1)

 (2)

 (3)

$\mathcal{P} := \mathcal{A}/(1), (2), (3)$

- $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ s.t. for ${}^\forall A \in \mathcal{P}$: an arrow diagram,

  1. $\phi(A) = 0$, if A が n+1 本以上の arrow を持つ.
  2. $\phi(A) = A$, if A が n+1 本未満の arrow を持つ.

  $\mathcal{P}_n := \phi(\mathcal{P})$

  $I_n := \phi \circ I$

- $(\cdot, \cdot) : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ s.t. for ${}^\forall A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$: arrow diagrams,

  1. $(A_1, A_2) = \begin{cases} 1 & (A_1 = A_2) \\ 0 & (A_1 \neq A_2). \end{cases}$
  2. $(A_1 + A_2, A_3) = (A_1, A_3) + (A_2, A_3)$, $(A_1, A_2 + A_3) = (A_1, A_2) + (A_1, A_3)$.

- $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{A} \times \mathcal{D} \to \mathbb{Z}$ s.t.

  for ${}^\forall A \in \mathcal{A}$: an arrow diagram, ${}^\forall D \in \mathcal{D}$,

$$\langle A, D \rangle = (A, I_n(D)).$$

4.1 n-variation

- D : string link の Gauss diagram

  $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$: D の chord の集合 ($A_i \neq \emptyset$)

  以下の 1, 2 を満たすとき，D は *n-trivial* :

  1. $A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$.
  2. $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}\}$ の任意の（空でない）subfamily の chord を取り除くと，D は classical Reidemeister move (2) を施して，全ての chord を除くことができる.

- D : a Gauss diagram

  D' : (n-1)-trivial な μ-component string link の Gauss diagram

  D の chord の端点を持たない任意の segment を μ 個選び，その segment の向きと合うように，D' の segment を貼り合わせる．この変形を D の *n-variation* と呼ぶ.

- M_1, M_2 : local moves

  $M_1 \cong M_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} M_1$ と M_2 は互いに一度だけ施すことによって実現できる.