epi. $\eta_k : \overline{A} = \langle a_{ij} \rangle \twoheadrightarrow A = \langle a_{i1} \rangle$ is defined by

$$\begin{cases} \eta_1(a_{ij}) = a_{i1}, \quad \eta_k(a_{i1}) = a_{i1} \\ \eta_{k+1}(a_{ij+1}) = \eta_k(v_{ij}^{-1} a_{i1} v_{ij}) \end{cases}$$

$\mathrm{Con}(\{s_{ij}\};\overline{A})$

<u>Claim 1</u> (1k) $\eta_k(a_{ij}) \equiv a_{ij} \pmod{\overline{A}_k N}$

(2k) $\eta_k(a_{ij}) \equiv \eta_{k+1}(a_{ij}) \pmod{A_k}$

(注1) G : a group, $N \triangleleft G$

$x \equiv y \pmod{G_k N} \Rightarrow x^{-1} g x \equiv y^{-1} g y \pmod{G_{k+1} N}$ for $g \in G$

∵ $xy^{-1} = ab \ ({}^\exists a \in G_k, {}^\exists b \in N)$ とすると

$[g, xy^{-1}] = [g, ab] = ga\cancel{b}g^{-1}b^{-1}a^{-1}$

$= ga\, g^{-1}a^{-1}ag\, bg^{-1}b^{-1}a^{-1}$

$= [g, a]\, a\, gbg^{-1}\, b^{-1} a^{-1} = [g, a] c \ ({}^\exists c \in N)$

$x^{-1} g x (y^{-1} g y)^{-1} = x^{-1} [g, xy^{-1}] x \in G_{k+1} N$ //

(注2) G : a group,

$x \equiv y \pmod{G_k} \Rightarrow x^{-1} g x \equiv y^{-1} g y \pmod{G_{k+1}}$

∵ $[g, xy^{-1}] \in G_{k+1}$ より

$x^{-1} g x \cdot (y^{-1} g y)^{-1} = x^{-1} g x\, y^{-1} g y = x^{-1}[g, xy^{-1}] x \in G_{k+1}$ //

<u>Proof of (1k)</u> double induction on k, j

$k = 1 \Rightarrow \overline{A}_k N = \overline{A}_1 N = \overline{A}$ ∴ ${}^\forall j$ で o.k.

$j = 1 \Rightarrow \eta_k(a_{i1}) = a_{i1}$ ∴ ${}^\forall k$ で o.k.

$\eta_k(a_{ij}) \equiv a_{ij} \pmod{\overline{A}_k N}$ を仮定する.

帰納法の仮定より $\eta_k(v_{ij}) \equiv v_{ij} \pmod{\overline{A}_k N}$ なので

(注1)より $\eta_k(v_{ij}^{-1} a_{i1} v_{ij}) \equiv v_{ij}^{-1} a_{i1} v_{ij} \pmod{\overline{A}_{k+1} N}$

$\equiv a_{ij+1} \pmod{N}$

∴ $\eta_{k+1}(a_{ij}) \equiv a_{ij+1} \pmod{\overline{A}_{k+1} N}$ ▨

Proof of (2k) double induction on k, j

$k=1, j=1 \Rightarrow$ o.k.

帰納法の仮定より $\eta_k(v_{ij}) \equiv \eta_{k+1}(v_{ij}) \pmod{A_k}$

(注2)より $\eta_k(v_{ij}^{-1} a_{i1} v_{ij}) \equiv \eta_{k+1}(v_{ij}^{-1} a_{i1} v_{ij}) \pmod{A_{k+1}}$

$\therefore \eta_{k+1}(a_{ij+1}) \equiv \eta_{k+2}(a_{ij+1}) \pmod{A_{k+1}}$ ▨

Claim 2 $\quad G \cong \langle a_{ij} \mid s_{ij} \rangle$

$$G/G_q \cong \langle a_{ij} \mid s_{ij}, \overline{A}_q \rangle$$

Claim 2より $G/G_q \cong \langle a_{ij} \mid s_{ij}, \overline{A}_q \rangle = \overline{A}/Con(\overline{A}_q \cup \{s_{ij}\}; \overline{A}) = \overline{A}/\overline{A}_q N$

$$\overset{\text{Claim } (1q)+(T1)}{\cong} \langle a_{ij} \mid s_{ij}, \overline{A}_q, a_{ij}\eta_q(a_{ij})^{-1} \rangle$$

$$= \langle a_{ij} \mid \eta_q(s_{ij}), \underset{\substack{\| \\ A_q}}{\eta_q(\overline{A}_q)}, a_{ij}\eta_q(a_{ij})^{-1} \rangle \quad \eta_q \text{ is epi.}$$

$$\overset{(T2)}{\cong} \langle a_{i1} \mid \eta_q(s_{ij}), A_q \rangle$$

ここで、$1 \leq j < r_i$

$$\begin{aligned}
\eta_q(s_{ij}) &= \eta_q(a_{ij+1}^{-1} v_{ij}^{-1} a_{i1} v_{ij}) \\
&= \eta_q(a_{ij+1}^{-1})\, \eta_q(v_{ij}^{-1} a_{i1} v_{ij}) \\
&= \eta_q(a_{ij+1}^{-1})\, \eta_{q+1}(a_{ij+1}) \\
&\overset{\text{Claim } (2q)}{\equiv} \eta_q(a_{ij+1}^{-1})\, \eta_q(a_{ij+1}) \pmod{A_q} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j = r_i \Rightarrow \eta_q(s_{ir_i}) &= \eta_q(a_{i r_i+1}^{-1} v_{ir_i}^{-1} a_{i1} v_{ir_i}) \\
&= \eta_q(a_{i1}^{-1} l_i^{-1} a_{i1} l_i) \\
&= a_{i1}^{-1} \eta_q(l_i^{-1}) a_{i1} \eta_q(l_i) \\
&= [a_{i1}, \eta_q(l_i)]
\end{aligned}$$

以上より $G/G_q \cong \langle a_{i1} \mid [a_{i1}, \eta_q(l_i)], A_q \rangle$

Wirtinger pres. の構成より $\alpha_i := a_{i1}$ は L の the ith meridianであり、Claim (1q) より. $\lambda_i := \eta_q(l_i)$ は L の the ith longitude である。▨

Proof of Claim 2 $\left(\leftarrow G/G_g \cong \langle a_{ij} \mid s_{ij}, \overline{A}_g \rangle = \overline{A}/\overline{A}_g N \right)$

$G/G_g = (\overline{A}/N)/(\overline{A}/N)_g$ なので

$\varphi : \overline{A}/N \longrightarrow \overline{A}/\overline{A}_g N$: natural proj. に対し

準同型定理より、$\operatorname{Ker}\varphi = (\overline{A}/N)_g$ を示せば良い.

Lem $(\overline{A}/N)_g = \overline{A}_g/N$

∵ induction on g, $g = 1 \Rightarrow$ o.k.

$(\subset)$ $[aN, bN]$: $(\overline{A}/N)_{g+1}$ の generator $\left(aN \in \overline{A}/N,\ bN \in \underset{\text{帰納法の仮定}}{\overline{(\overline{A}/N)_g}\ \overset{\overline{A}_g/N}{\|}}\right)$

に対し、$[aN, bN] \in \overline{A}_{g+1}/N$ を示せば良い.

$[aN, bN] = aNbN(aN)^{-1}(bN)^{-1}$

$= [\underset{\overline{A}}{\underset{\cap}{a}}, \underset{\overline{A}_g}{\underset{\cap}{b}}]N \in \overline{A}_{g+1}/N$

$(\supset)$ $\overline{A}_{g+1}/N$ の generator $[a, b]N$ $(a \in \overline{A},\ b \in \overline{A}_g)$ に対し、同様に

$[a, b]N = [\underset{\overline{A}/N}{\underset{\cap}{aN}}, \underset{\overline{A}_g/N = (\overline{A}/N)_g}{\underset{\cap}{bN}}] \in (\overline{A}/N)_{g+1}$ //

$\operatorname{Ker}\varphi = (\overline{A}/N)_g \left(= \overline{A}_g/N\right)$ を示す.

$(\subset)$ $aN \in \operatorname{Ker}\varphi$

$aN \subset \overline{A}_g N$ 特に $a \in \overline{A}_g N$

$\therefore \exists x \in \overline{A}_g, \exists y \in N$ s.t. $a = xy$

$\therefore a \equiv x \pmod N$

$aN = xN \in \overline{A}_g/N$ $\therefore \operatorname{Ker}\varphi \subset (\overline{A}/N)_g$ //

$(\supset)$ $(\overline{A}/N)_g = \overline{A}_g/N \ni aN$ $(a \in \overline{A}_g)$ とすると

$aN \subset \overline{A}_g N$

$\therefore aN \in \operatorname{Ker}\varphi$

$\therefore (\overline{A}/N)_g \subset \operatorname{Ker}\varphi$. ▨