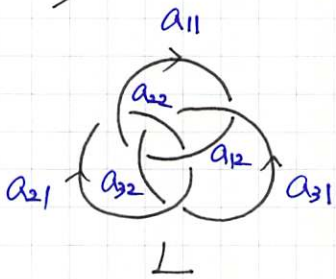
Ex　$\overline{\mu}_L(123)$ を求める.



L

$$\begin{cases} l_1 = a_{31} a_{32}^{-1} \\ l_2 = a_{11}^{-1} a_{12} \\ l_3 = a_{22}^{-1} a_{21} \end{cases}$$

$\lambda_3 = [l_3] \in G/G_3$ を求める.

$$\begin{aligned}\eta_3(l_3) &= \eta_3(a_{22}^{-1})\,\eta_3(a_{21}) \\ &= \eta_2(\nu_{21}^{-1} a_{21}^{-1} \nu_{21})\, a_{21} \\ &= \eta_2(a_{11})\, a_{21}^{-1}\, \eta_2(a_{11}^{-1})\, a_{21} \\ &= a_{11} a_{21}^{-1} a_{11}^{-1} a_{21} = \alpha_1 \alpha_2^{-1} \alpha_1^{-1} \alpha_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(\lambda_3) &= E(\alpha_1 \alpha_2^{-1} \alpha_1^{-1} \alpha_2) \\ &= (1+X_1)(1-X_2+X_2^2-X_2+\cdots)(1-X_1+X_1^2-X_1^3+\cdots)(1+X_2)\end{aligned}$$

$\mu_L(123)$ … X_1X_2 の係数

$= -1+1-1 = -1$

$\therefore\ \overline{\mu}_L(123) = \mu(123) \mod \Delta_L(123) = -1$ //

§. Invariance of Milnor's $\bar{\mu}$-inv.

L : an ordered ori. n-comp. link in S^3

$G = \pi_1(S^3 \setminus L)$

Thm $G/G_q \cong \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_n \mid [\alpha_i, \lambda_i]\ (i=1,\cdots,n),\ A_q \rangle$

$\eta_q : \langle a_{ij} \rangle \to \langle \alpha_i \rangle$

$\rightsquigarrow$ $\lambda_j \in G/G_q$ を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ の語で表すことができる.

λ_j の Magnus exp. を考える.

Magnus exp. $E : \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_n \rangle \longrightarrow \mathbb{Z}\langle\langle X_1, \cdots, X_n \rangle\rangle$

$\alpha_i \longmapsto 1 + X_i$

Rmk. $\langle \alpha_1, \cdots, \alpha_n \rangle \cong E(\langle \alpha_1, \cdots, \alpha_n \rangle)$.

$$E(\lambda_j) = 1 + \sum_{k<q} \mu(i_1 \cdots i_k j) X_{i_1} \cdots X_{i_k} + (\deg \geq q)$$

Rmk $\mu(i_1 \cdots i_k j)$ は λ_j の表示の仕方に依存する.

$$\Delta_L(i_1 \cdots i_k j) = \gcd \{ \mu(J) \mid J \xleftarrow[\text{残りを巡回置換}]{\text{1つ以上の項を取り除き}} i_1 \cdots i_k j \}$$

Thm $\bar{\mu}_L(I) = \mu(I) \bmod \Delta_L(I)$ is an inv. of L for ${}^{\forall}$seq I.

Proof. $\bar{\mu}$ が次の (1) ～ (4) で不変であることを示せばよい.

(1) λ_j をその conj. にとりかえる. ← fix

(2) α_i をその conj. にとりかえる.

(3) λ_j に $[\alpha_i, \lambda_i]$ の conj. の積をかける.

(4) λ_j に A_q の元をかける.

q : fix

$$D_j := \left\{ \sum \nu(i_1 \cdots i_k) X_{i_1} \cdots X_{i_k} \;\middle|\; \begin{array}{l} \nu(i_1 \cdots i_k) \equiv 0 \bmod \Delta_L(i_1 \cdots i_k j) \ (k<q) \\ \nu(i_1 \cdots i_k) \in \mathbb{Z} \ (\text{if } k \geq q) \end{array} \right\}$$

ie, D_j の元は $\displaystyle\sum_{k<q} (\Delta(i_1 \cdots i_k j) \text{の倍数}) X_{i_1} \cdots X_{i_k} + (\deg \geq q)$

Claim (a) D_j is a two-sided ideal of $\mathbb{Z}\langle\langle X_1, \cdots, X_n \rangle\rangle$.

∵ $\nu(i_1 \cdots i_k) X_{i_1} \cdots X_{i_k} \in D_j$,

$\xi X_{h_1} \cdots X_{h_t} \in \mathbb{Z}\langle\langle X_1, \cdots, X_n \rangle$ $(\xi \in \mathbb{Z})$

$k \geq g \Rightarrow$ o.k.

$k < g \Rightarrow \nu(i_1 \cdots i_k) \equiv 0 \pmod{\Delta_1(i_1 \cdots i_k j)}$ より

$\nu(i_1 \cdots i_k) \equiv 0 \pmod{\Delta_1(h_1 \cdots h_t i_1 \cdots i_k j)}$

$\therefore \xi \nu(i_1 \cdots i_k) X_{h_1} \cdots X_{h_t} X_{i_1} \cdots X_{i_k} \in D_j$

同様に $\nu(i_1 \cdots i_k) \xi X_{i_1} \cdots X_{i_k} X_{h_1} \cdots X_{h_t} \in D_j$ //

$\overline{\mu}(i_1 \cdots i_k j)$ が (1)〜(4) で不変であることを g に関する帰納法で示す.

(注) D_j は $\overline{\mu}(i_1 \cdots i_k j)$ $(k < g-1)$ で定まるので、帰納法の仮定より (1)〜(4) では不変である.

$\lambda_j \xleftrightarrow{(1)\sim(4)} \lambda'_j$, $E(\lambda_j) - E(\lambda'_j) \in D_j$ を示せば良い.

Claim (b) $E(\lambda_j) = 1 + f_j$ とする.

${}^\forall X_i$ $(i = 1, \cdots, n)$, $f_j X_i \equiv X_i f_j \equiv 0 \in D_j$.

∵ $\mu(i_1 \cdots i_k j) X_{i_1} \cdots X_{i_k}$: f_j の項

$\mu(i_1 \cdots i_k j) \equiv 0 \pmod{\Delta_1(i_1 \cdots i_k i j)}$ より

$\mu(i_1 \cdots i_k j) X_{i_1} \cdots X_{i_k} X_i \in D_j$

$\therefore f_j X_i \in D_j$ 同様に $X_i f_j \in D_j$ //

Claim (c) ${}^\forall X_i$ $(i = 1, \cdots, n)$, $\mu(i_1 \cdots i_k j) \underline{X_{i_1} \cdots {}_{i_{k+t}}} \in D_j$

$X_{i_1} \cdots X_{i_k}$ に $X_1, \cdots, X_n$ を t 個挿入して得られる単項式