

量子群と

ヤン・バクスター方程式 No.1

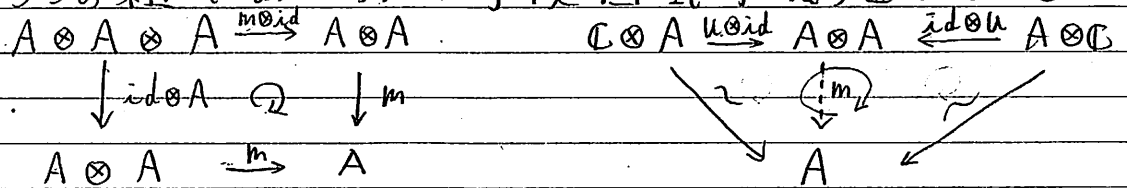
1. ホール代数

2. $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$

1. 束、代数

Def. 代数 (A, m, u) とは $\mathbb{C}K$ のベクトル空間 A および線型写像
 $m: A \otimes A \rightarrow A$ $u: \mathbb{C} \rightarrow A$

からなる3つの組であって次の可換図式が成り立つものをいう。

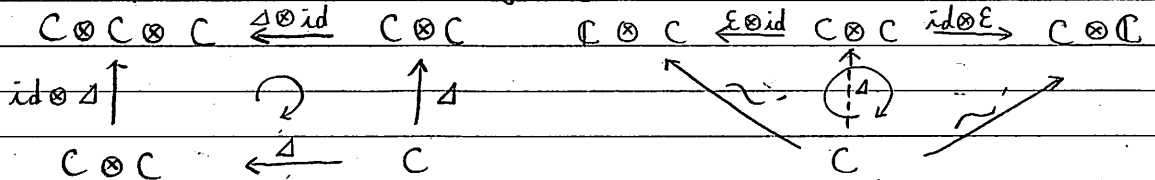


ただし $\sim: \mathbb{C} \otimes A (A \otimes \mathbb{C}) \rightarrow A; \alpha \otimes a (a \otimes \alpha) \mapsto \alpha a (a \alpha)$

i.e. $m \circ (m \otimes id) = m \circ (id \otimes m)$, $m \circ (id \otimes u) = id = m \circ (u \otimes id)$

Def. 余代数 (C, Δ, ϵ) とは $\mathbb{C}K$ のベクトル空間 C および線型写像
 $\Delta: C \rightarrow C \otimes C$, $\epsilon: C \rightarrow \mathbb{C}$

からなる3つの組であって次の可換図式が成り立つものをいう。



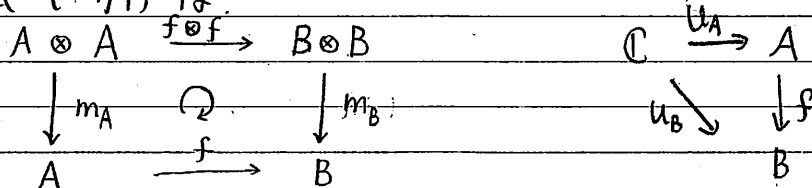
ただし $\sim: C \rightarrow (C \otimes C) (C \otimes C); \alpha \mapsto 1 \otimes \alpha (\alpha \otimes 1)$

i.e. $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$, $(id \otimes \epsilon) \circ \Delta = id = (\epsilon \otimes id) \circ \Delta$

Def. 代数 $(A, m_A, u_A), (B, m_B, u_B)$ に対して $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(A, B)$ が代数射であるとは

$$f \circ m_A = m_B \circ (f \otimes f), \quad f(1_A) = 1_B$$

可換図式でかけば

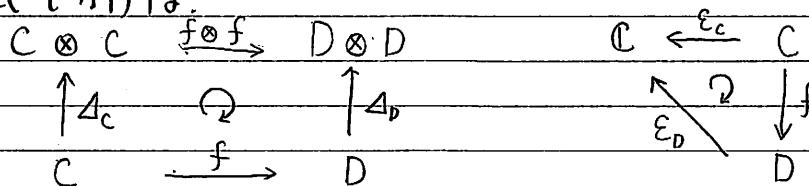


を満足することである。

余代数 $(C, \Delta, \epsilon), (D, \Delta', \epsilon')$ に対して $g \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(C, D)$ が余代数射であるとは

$$\Delta_D \circ g = (g \otimes g) \circ \Delta_C, \quad \epsilon_D \circ g = \epsilon_C$$

可換図式でかけば



を満足することである。

以下 $\iota: V \otimes W \rightarrow W \otimes V; v \otimes w \mapsto w \otimes v$ とする.

Prop 1.1 代数 $(A, m_A, u_A), (B, m_B, u_B)$ に対し $(A \otimes B, m_{A \otimes B}, u_{A \otimes B})$

$$m_{A \otimes B} := (m_A \otimes m_B) \circ (\text{id} \otimes \iota \otimes \text{id})$$

$$u_{A \otimes B}: \mathbb{C} \rightarrow A \otimes B; 1 \mapsto u_A(1) \otimes u_B(1)$$

として $m_{A \otimes B}$ は双線型で, $u_{A \otimes B}$ は生成元で拡張する代数となる.

Lemma 1.1 $V, V', W, W'; \mathbb{C}$ 上ベクトル空間, $f: V \rightarrow V', g: W \rightarrow W'$ を線型写像とすると $f \otimes g: V \otimes W \rightarrow V' \otimes W'; x \otimes y \mapsto f(x) \otimes g(y)$ は線型写像である.

$$\begin{aligned} \textcircled{!} (x, y) \in V \times W \text{ に } f(x) \otimes g(y) \in V' \otimes W' \text{ を対応させる写像を } f' \\ \text{ とすると. } f'(x+x', y) &= f(x+x') \otimes g(y) = (f(x) + f(x')) \otimes g(y) \quad (\because f \text{ は線型写像}) \\ &= f(x) \otimes g(y) + f(x') \otimes g(y) \\ f'(cx, y) &= f(cx) \otimes g(y) = (cf(x)) \otimes g(y) \quad (\because f \text{ は線型写像}) \\ &= c(f(x) \otimes g(y)) \end{aligned}$$

同様にして.

$f'(x, y+y') = f(x) \otimes g(y) + f(x) \otimes g(y'), f'(x, cy) = c(f(x) \otimes g(y))$
従って f' は双線型写像である. テンソル積の構成法により線型写像 $f: V \otimes W \rightarrow V' \otimes W'$ が矛盾なく一意的に定義できる.

$$\begin{array}{ccc} V \times W & & \\ \otimes \downarrow & \searrow f' & \\ V \otimes W & \xrightarrow{f} & V' \otimes W' \end{array}$$

Proof. Lemma 1. により $m_{A \otimes B}$ は双線型なので well-defined である.

(結合律) $m_{A \otimes B} \circ (m_{A \otimes B} \otimes (\text{id} \otimes \text{id}))((a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2)) \otimes (a_3 \otimes b_3)$

$$= m_{A \otimes B}((m_A(a_1 \otimes a_2) \otimes m_B(b_1 \otimes b_2)) \otimes (a_3 \otimes b_3))$$

$$= m_A(m_A(a_1 \otimes a_2) \otimes a_3) \otimes m_B(m_B(b_1 \otimes b_2) \otimes b_3)$$

$$= m_A(m_A \circ \text{id})(a_1 \otimes a_2) \otimes a_3 \otimes m_B(m_B \circ \text{id})(b_1 \otimes b_2) \otimes b_3$$

$$= m_A(\text{id} \circ m_A)(a_1 \otimes (a_2 \otimes a_3)) \otimes m_B(\text{id} \circ m_B)(b_1 \otimes (b_2 \otimes b_3))$$

$$= m_A(a_1 \otimes m_A(a_2 \otimes a_3)) \otimes m_B(b_1 \otimes m_B(b_2 \otimes b_3))$$

$$= m_{A \otimes B}((a_1 \otimes b_1) \otimes (m_A(a_2 \otimes a_3) \otimes m_B(b_2 \otimes b_3)))$$

$$= m_{A \otimes B} \circ ((\text{id} \otimes \text{id}) \otimes m_{A \otimes B})((a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2) \otimes (a_3 \otimes b_3))$$

(単位律) $m_{A \otimes B} \circ ((\text{id} \otimes \text{id}) \otimes u_{A \otimes B})(a \otimes b \otimes 1)$

$$= m_{A \otimes B} \circ ((a \otimes b) \otimes (u_A(1) \otimes u_B(1)))$$

$$= m_A(a \otimes u_A(1)) \otimes m_B(b \otimes u_B(1))$$

$$= m_A \circ (\text{id} \otimes u_A)(a \otimes 1) \otimes m_B \circ (\text{id} \otimes u_B)(b \otimes 1)$$

$$= m_A \circ (u_A \otimes \text{id})(1 \otimes a) \otimes m_B \circ (u_B \otimes \text{id})(1 \otimes b)$$

$$= \text{id}(a) \otimes \text{id}(b)$$

($\because \mathbb{C} \otimes A, A \otimes \mathbb{C}, A$ と $\mathbb{C} \otimes B, B \otimes \mathbb{C}, B$ はそれぞれ同視)

Prop 1.2 余代数 $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ に対して $(C \otimes D, \Delta_{C \otimes D}, \varepsilon_{C \otimes D})$

$$\Delta_{C \otimes D} := (\text{id} \otimes \iota \otimes \text{id}) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)$$

$$\varepsilon_{C \otimes D} := \varepsilon_C \otimes \varepsilon_D$$

とすれば余代数となる。

Def. ベクトル空間 B が代数 (B, m_B, u_B) , 余代数 $(B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ の構造をもつとする。このとき m_B, u_B がともに余代数射であるか Δ_B, ε_B がともに代数射であるとき $(B, m_B, u_B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ を双代数という。

Def. 双代数 $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ に対して線型写像 $S: H \rightarrow H$ が $m(S \otimes \text{id}) \Delta = u \circ \varepsilon = m(\text{id} \otimes S) \Delta$ をみたすとき S を対合射という。対合射をもつ双代数 $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ をホップ代数という。

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{C} & \xrightarrow{u} & H \\ \downarrow \Delta & & & & \uparrow m \\ H \otimes H & \xrightarrow[\text{id} \otimes S]{S \otimes \text{id}} & & & H \otimes H \end{array}$$

Prop 1.3 対合射 S は存在すれば一意的で反代数射が反余代数射となる。

Proof. (反代数射)

$$\begin{aligned} 1_H &= u(1) = (u \circ \varepsilon)(1_H) = m(\text{id} \otimes S) \Delta(1_H) = m(1_H \otimes S(1_H)) \\ &= S(1_H) \end{aligned}$$

$$\text{ここで } \nu(g \otimes h) = S(h)S(g), \rho(g \otimes h) = S(g)h \text{ とし}$$

$$m \circ (\rho \otimes m) \circ \Delta_{H \otimes H} = m(m \otimes \nu) \circ \Delta_{H \otimes H}$$

を示す。

Def. \mathcal{A} ; リンゴ \mathcal{A} 上の自由結合代数 (テンソル代数) とは

$$T(\mathcal{A}) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(\mathcal{A})$$

$$T^0(\mathcal{A}) := \mathbb{C}, \quad T^k(\mathcal{A}) := \underbrace{\mathcal{A} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}}_k \quad (k \geq 1)$$

である。 $T(\mathcal{A})$ の中で

$$X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y] \quad (X, Y \in \mathcal{A})$$

の形の元で生成される両側イデアルを I とするとき、 \mathcal{A} の包絡各環 $U(\mathcal{A})$ とは $T(\mathcal{A})/I$ である。

Prop. 1.4 $U(\mathcal{A})$ は 次のようにしてホップ代数になる。 まず $X \in \mathcal{A}$ の上で

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$$

$$\varepsilon(X) = 0$$

$$S(X) = -X$$

と定義し、 $U(\mathcal{A})$ 全体へは

$$\Delta: U(\mathcal{A}) \rightarrow U(\mathcal{A}) \otimes U(\mathcal{A}), \quad \varepsilon: U(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C} \text{ は代数射}$$

$$S: U(\mathcal{A}) \rightarrow U(\mathcal{A}) \text{ は反代数射}$$

として拡張する。

ex. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{ X \in \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \mid \text{tr } X = 0 \}$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) = \mathbb{C}\langle H, E, F \rangle$$

($\mathbb{C}\langle H, E, F \rangle$ は非可換多項式環)

$$U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) = \mathbb{C}\langle H, E, F \rangle / \langle HE - EH - 2E, HF - FH + 2E, EF - FE - H \rangle$$

$$\cong \mathbb{C}\langle F^p H^q E^r \rangle \quad (p, q, r \geq 0)$$

$$(\because EH = HE + 2E, \quad HF = FH + 2F, \quad EF = FE + H)$$

Proof. Δ は well-defined.

$$\Delta(XY) - \Delta(YX) - \Delta([X, Y])$$

$$= XY \otimes 1 - YX \otimes 1 - [X, Y] \otimes 1 + 1 \otimes XY - 1 \otimes YX - 1 \otimes [X, Y]$$

$$= (XY - YX - [X, Y]) \otimes 1 + 1 \otimes (XY - YX - [X, Y])$$

$$\in I \otimes T(\mathcal{A}) + T(\mathcal{A}) \otimes I. \quad (\because U(\mathcal{A}) \otimes U(\mathcal{A}) = \frac{T(\mathcal{A})/I \otimes T(\mathcal{A})/I}{I \otimes T(\mathcal{A}) + T(\mathcal{A}) \otimes I})$$

Lemma. $V' \subset V, W' \subset W$; 部分空間のとき

$$\therefore V \otimes W \rightarrow V/V' \otimes W/W' \text{ は同型}$$

$$\frac{(V \otimes W)_{(V' \otimes W + V \otimes W')}}{(V \otimes W)_{(V' \otimes W + V \otimes W')}} \rightarrow (V/V') \otimes (W/W')$$

をひきおこす。