量子群と

ヤン・バクスター方程式 No.1

1. ホップ代数

2. $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$

1. ホップ代数

Def. 代数 (A, m, u) とは $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 A および線型写像

$$m; A\otimes A \to A \qquad , \qquad u; \mathbb{C} \to A$$

からなる3つの組であって次の可換図式が成り立つものをいう。

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes A \arrow[r, "m\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes A"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A\otimes A \arrow[d, "m"] \\
A\otimes A \arrow[r, "m"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}\otimes A \arrow[r, "u\otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\sim"'] & A\otimes A \arrow[d, "m"] & A\otimes \mathbb{C} \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes u"'] \arrow[dl, "\sim"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

ただし、$\sim$; $\mathbb{C}\otimes A\ (A\otimes\mathbb{C}) \to A$; $\alpha\otimes a\ (a\otimes\alpha) \longmapsto \alpha a\ (\alpha a)$

i.e. $m\circ(m\otimes \mathrm{id}) = m\circ(\mathrm{id}\otimes m)$, $m\circ(\mathrm{id}\otimes u) = \mathrm{id} = m\circ(u\otimes \mathrm{id})$

Def. 余代数 (C, Δ, ε) とは $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 C および線型写像

$$\Delta; C \to C\otimes C \qquad , \qquad \varepsilon; C \to \mathbb{C}$$

からなる3つの組であって次の可換図式が成り立つものをいう。

$$\begin{tikzcd}
C\otimes C\otimes C & C\otimes C \arrow[l, "\Delta\otimes \mathrm{id}"'] \\
C\otimes C \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & C \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}\otimes C & C\otimes C \arrow[l, "\varepsilon\otimes \mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] & C\otimes \mathbb{C} \\
 & C \arrow[ul, "\sim"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

ただし、$\sim$: $C \to (\mathbb{C}\otimes C)\ (C\otimes\mathbb{C})$; $\alpha \longmapsto 1\otimes\alpha\ (\alpha\otimes 1)$

i.e. $(\Delta\otimes \mathrm{id})\circ\Delta = (\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\Delta$, $(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\circ\Delta = \mathrm{id} = (\varepsilon\otimes \mathrm{id})\circ\Delta$

Def. 代数 $(A, m_A, u_A), (B, m_B, u_B)$ に対して $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, B)$ が代数射であるとは

$$f\circ m_A = m_B\circ(f\otimes f) \qquad , \qquad f(1_A) = 1_B$$

可換図式でかけば

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B\otimes B \arrow[d, "m_B"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "u_A"] \arrow[dr, "u_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

を満たすことである。

余代数 $(C, \Delta, \varepsilon), (D, \Delta', \varepsilon')$ に対して $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C, D)$ が余代数射であるとは

$$\Delta_D\circ f = f\otimes f\circ\Delta_C \qquad , \qquad \varepsilon_D\circ f = \varepsilon_C$$

可換図式でかけば

$$\begin{tikzcd}
C\otimes C \arrow[r, "f\otimes f"] & D\otimes D \\
C \arrow[u, "\Delta_C"] \arrow[r, "f"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & D \arrow[u, "\Delta_D"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} & C \arrow[l, "\varepsilon_C"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
 & D \arrow[ul, "\varepsilon_D"]
\end{tikzcd}$$

を満たすことである。

以下. $\iota: V\otimes W \longrightarrow W\otimes V\ ;\ v\otimes w \longmapsto w\otimes v$ とする.

Prop 1.1 代数 (A, m_A, u_A), (B, m_B, u_B) に対して $(A\otimes B, m_{A\otimes B}, u_{A\otimes B})$

$$m_{A\otimes B} := (m_A\otimes m_B)\circ(id\otimes\iota\otimes id)$$

$$u_{A\otimes B}: \mathbb{C} \to A\otimes B\ ;\ 1 \longmapsto u_A(1)\otimes u_B(1)$$

として $m_{A\otimes B}$ は双線型で, $u_{A\otimes B}$ は生成元で拡張すると代数となる。

Lemma 1.1 V, V', W, W' ; $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間, $f: V\to V'$, $g: W\to W'$ を線型写像とするとき $f\otimes g: V\otimes W \longrightarrow V'\otimes W'\ ;\ x\otimes y \longmapsto f(x)\otimes g(y)$ は線型写像である。

∵ $(x, y)\in V\times W$ に $f(x)\otimes g(x)\in V'\otimes W'$ を対応させる写像を f' とすると.

$$f'(x+x', y) = f(x+x')\otimes g(y) = (f(x)+f(x'))\otimes g(y) \quad (\because f\text{は線型写像})$$
$$= f(x)\otimes g(y) + f(x')\otimes g(y)$$
$$f'(cx, y) = f(cx)\otimes g(y) = (cf(x))\otimes g(y) \quad (\because f\text{は線型写像})$$
$$= c\,(f(x)\otimes g(y))$$

同様にして

$$f'(x, y+y') = f(x)\otimes g(y) + f(x)\otimes g(y'),\quad f'(x, cy) = c\,(f(x)\otimes g(y))$$

従って f' は双線型写像である。テンソル積の構成法により線型写像 f ; $V\otimes W \longrightarrow V'\otimes W'$ が矛盾なく一意的に定義できる。

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ V\otimes W \arrow[r, "\exists! f"'] & V'\otimes W' \end{tikzcd}$$

Proof. Lemma 1. により $m_{A\otimes B}$ は双線型なので well-defined である。

(結合律) $m_{A\otimes B}\circ(m_{A\otimes B}\otimes(id\otimes id))((a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes b_2)\otimes(a_3\otimes b_3))$
$= m_{A\otimes B}((m_A(a_1\otimes a_2)\otimes m_B(b_1\otimes b_2))\otimes(a_3\otimes b_3))$
$= m_A(m_A(a_1\otimes a_2)\otimes a_3)\otimes m_B(m_B(b_1\otimes b_2)\otimes b_3)$
$= m_A(m_A\circ id)((a_1\otimes a_2)\otimes a_3)\ \otimes\ m_B(m_B\circ id)((b_1\otimes b_2)\otimes b_3)$
$= m_A(id\circ m_A)(a_1\otimes(a_2\otimes a_3))\ \otimes\ m_B(id\circ m_B)(b_1\otimes(b_2\otimes b_3))$
$= m_A(a_1\otimes m_A(a_2\otimes a_3))\otimes m_B(b_1\otimes m_B(b_2\otimes b_3))$
$= m_{A\otimes B}((a_1\otimes b_1)\otimes(m_A(a_2\otimes a_3)\otimes m_B(b_2\otimes b_3)))$
$= m_{A\otimes B}\circ((id\otimes id)\otimes m_{A\otimes B})((a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes b_2)\otimes(a_3\otimes b_3))$

(単位律) $m_{A\otimes B}\circ((id\otimes id)\otimes u_{A\otimes B})(a\otimes b\otimes 1)$
$= m_{A\otimes B}\circ((a\otimes b)\otimes(u_A(1)\otimes u_B(1)))$
$= m_A(a\otimes u_A(1))\otimes m_B(b\otimes u_B(1))$
$= m_A\circ(id\otimes u_A)(a\otimes 1)\ \otimes\ m_B\circ(id\otimes u_B)(b\otimes 1)$
$= m_A\circ(u_A\otimes id)(1\otimes a)\ \otimes\ m_B\circ(u_B\otimes id)(1\otimes b)$
$= id(a)\otimes id(b)$

(∵ $\mathbb{C}\otimes A$, $A\otimes\mathbb{C}$, A と $\mathbb{C}\otimes B$, $B\otimes\mathbb{C}$, B はそれぞれ同一視)

Prop 1.2 余代数 $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ に対して $(C\otimes D, \Delta_{C\otimes D}, \varepsilon_{C\otimes D})$

$$\Delta_{C\otimes D} := (id\otimes\iota\otimes id)\circ(\Delta_C\otimes\Delta_D),$$
$$\varepsilon_{C\otimes D} := \varepsilon_A\otimes\varepsilon_B$$

とすれば余代数となる。

Def. ベクトル空間 B が代数 (B, m_B, u_B), 余代数 $(B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ の構造をもつとする。このとき、m_B, u_B がともに余代数射であるか、Δ_B, ε_B がともに代数射であるとき、$(B, m_B, u_B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ を双代数という。

Def. 双代数 $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ に対して、線型写像 $S: H\to H$ が
$$m(S\otimes id)\Delta = u\circ\varepsilon = m(id\otimes S)\Delta$$
をみたすとき S を対合射といい、対合射をもつ双代数 $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ をホップ代数という。

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\Delta"] & \mathbb{C} \arrow[r, "u"] & H \\ H\otimes H \arrow[rr, shift left, "S\otimes id"] \arrow[rr, shift right, "id\otimes S"'] & & H\otimes H \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd}$$

Prop 1.3 対合射 S は存在すれば一意的で反代数射かつ反余代数射となる。

Proof. (反代数射)

$$1_H = u(1) = (u\circ\varepsilon)(1_H) = m(id\otimes S)\Delta(1_H) = m(1_H\otimes S(1_H)) = S(1_H)$$

ここで $\nu(g\otimes h) = S(h)S(g)$, $\rho(g\otimes h) = S(gh)$ として、
$$m\circ(\rho\otimes m)\circ\Delta_{H\otimes H} = m(m\otimes\nu)\circ\Delta_{H\otimes H}$$
を示す。

Def. $\mathfrak{g}$；リー環 $\mathfrak{g}$ 上の自由結合代数(テンソル代数)とは

$$T(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(\mathfrak{g})$$

$$T^0(\mathfrak{g}) := \mathbb{C}, \quad T^k(\mathfrak{g}) := \overbrace{\mathfrak{g}\otimes\cdots\otimes\mathfrak{g}}^{k} \ (k\geq 1)$$

である。$T(\mathfrak{g})$ の中で

$$X\otimes Y - Y\otimes X - [X, Y] \quad (X, Y\in\mathfrak{g})$$

の形の元で生成される両側イデアルを I とするとき $\mathfrak{g}$ の包絡環 $U(\mathfrak{g})$ とは $T(\mathfrak{g})/I$ である。

Prop.1.4 $U(\mathfrak{g})$ は次のようにしてホップ代数になる。まず $X\in\mathfrak{g}$ の上で

$$\Delta(X) = X\otimes 1 + 1\otimes X$$
$$\varepsilon(X) = 0$$
$$S(X) = -X$$

と定義し、$U(\mathfrak{g})$ 全体へは

$\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})\otimes U(\mathfrak{g})$, $\varepsilon ; U(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ は代数射

$S : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ は反代数射

として拡張する。

ex. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{ X \in Mat_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}\, X = 0 \}$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) = \mathbb{C}\langle H, E, F\rangle$$

($\mathbb{C}\langle H, E, F\rangle$ は非可換多項式環)

$$U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) = \mathbb{C}\langle H, E, F\rangle / (HE-EH-2E,\ HF-FH+2F,\ EF-FE-H)$$
$$\cong \mathbb{C}\langle F^p H^q E^r\rangle \quad (p, q, r\geq 0)$$

($\because$ $EH = HE+2E$, $HF = FH+2F$, $EF = FE+H$)

Proof. Δ は well-defined

$$\Delta(XY) - \Delta(YX) - \Delta([X, Y])$$
$$= XY\otimes 1 - YX\otimes 1 - [X, Y]\otimes 1 + 1\otimes XY - 1\otimes YX - 1\otimes [X, Y]$$
$$= (XY - YX - [X, Y])\otimes 1 + 1\otimes (XY - YX - [X, Y])$$
$$\in I\otimes T(\mathfrak{g}) + T(\mathfrak{g})\otimes I. \quad \left(\because\ U(\mathfrak{g})\otimes U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I \otimes T(\mathfrak{g})/I = T(\mathfrak{g})\otimes T(\mathfrak{g}) / (I\otimes T(\mathfrak{g}) + T(\mathfrak{g})\otimes I)\right)$$

> **Lemma.** $V' < V$, $W' < W$；部分空間のとき
> $\therefore$ $V\otimes W \to V/V' \otimes W/W'$ は同型
>
> $$(V\otimes W)/(V'\otimes W + V\otimes W') \to (V/V')\otimes(W/W')$$
>
> をひきおこす。