No. ・ ・ (　　)

ε と S が well-defined も同様

$(U(\mathfrak{g}), \Delta, \varepsilon)$ が双代数

余結合律をチェックする。$\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$(\Delta\otimes id)\Delta(X) = (\Delta\otimes id)(X\otimes 1 + 1\otimes X) = \Delta(X)\otimes 1 + \Delta(1)\otimes X$$
$$= (X\otimes 1 + 1\otimes X)\otimes 1 + 1\otimes 1\otimes X$$
$$= X\otimes 1\otimes 1 + 1\otimes X\otimes 1 + 1\otimes 1\otimes X$$
$$(id\otimes\Delta)\Delta(X) = (id\otimes\Delta)(X\otimes 1 + 1\otimes X) = X\otimes\Delta(1) + 1\otimes\Delta(X)$$
$$= X\otimes 1\otimes 1 + 1\otimes(X\otimes 1 + 1\otimes X)$$
$$= X\otimes 1\otimes 1 + 1\otimes X\otimes 1 + 1\otimes 1\otimes X$$

$\Delta(X) = \sum_i x_i\otimes x_i'$, $\Delta(Y) = \sum_j y_j\otimes y_j'$ とする $(X, Y\in U(\mathfrak{g}))$

$$(\Delta\otimes id)\Delta(XY) = (\Delta\otimes id)\Delta(X)\Delta(Y) = (\Delta\otimes id)(\sum_i x_i\otimes x_i')(\sum_j y_j\otimes y_j')$$
$$= (\Delta\otimes id)(\sum_{i,j} x_i y_j\otimes x_i' y_j') = \sum\Delta(x_i y_j)\otimes x_i' y_j'$$
$$= \sum\Delta(x_i)\Delta(y_j)\otimes x_i' y_j' = \sum(\Delta(x_i)\otimes x_i')(\Delta(y_j)\otimes y_j')$$
$$= (\sum_i\Delta(x_i)\otimes x_i')(\sum_j\Delta(y_j)\otimes y_j')$$
$$= (\sum_i x_i\otimes\Delta(x_i'))(\sum_j y_j\otimes\Delta(y_j'))$$
$$= \sum_{i,j}(x_i y_j\otimes\Delta(x_i')\Delta(y_j'))$$
$$= (id\otimes\Delta)(\sum x_i\otimes x_i')(\sum y_j\otimes y_j') = (id\otimes\Delta)\Delta(XY)$$

余単位律をチェックする $\forall X\in\mathfrak{g}$ に対して.

$$(id\otimes\varepsilon)\circ\Delta(X) = (id\otimes\varepsilon)(X\otimes 1 + 1\otimes X) = X\otimes\varepsilon(1) + 1\otimes\varepsilon(X) = X\otimes 1$$
$$(\varepsilon\otimes id)\circ\Delta(X) = (\varepsilon\otimes id)(X\otimes 1 + 1\otimes X) = \varepsilon(X)\otimes 1 + \varepsilon(1)\otimes X = 1\otimes X$$

同様に $\Delta(X) = \sum_i x_i\otimes x_i'$; $\Delta(Y) = \sum_j y_j\otimes y_j'$ とする. $(X, Y\in U(\mathfrak{g}))$

$$(id\otimes\varepsilon)\circ\Delta(XY) = (id\otimes\varepsilon)(\sum_i x_i\otimes x_i')(\sum_j y_j\otimes y_j')$$
$$= (id\otimes\varepsilon)(\sum_{i,j} x_i y_j\otimes x_i' y_j') = \sum x_i y_j\otimes\varepsilon(x_i')\varepsilon(y_j')$$
$$= \sum_i(x_i\otimes\varepsilon(x_i'))\sum_j(y_j\otimes\varepsilon(y_j'))$$
$$= \sum_i(\varepsilon(x_i)\otimes x_i')\sum_j(\varepsilon(y_j)\otimes y_j')$$
$$= \sum\varepsilon(x_i)\varepsilon(y_j)\otimes x_i' y_j'$$
$$= (\varepsilon\otimes id)\circ\Delta(XY)$$

$(U(\mathfrak{g}), \Delta, \varepsilon, S)$ がホップ代数

$^\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して.

$$m(S\otimes id)\Delta(X) = m(S\otimes id)(X\otimes 1 + 1\otimes X) = m(S(X)\otimes 1 + S(1)\otimes X)$$
$$= m(-X\otimes 1 + 1\otimes X) = -X + X = 0$$
$$m(id\otimes S)\Delta(X) = m(id\otimes S)(X\otimes 1 + 1\otimes X) = m(X\otimes S(1) + 1\otimes S(X))$$
$$= m(X\otimes 1 + 1\otimes(-X)) = X - X = 0$$
$$u\circ\varepsilon(X) = u(0) = 0$$

同様に $\Delta(X) = \sum_i x_i\otimes x_i'$, $\Delta(Y) = \sum_j y_j\otimes y_j'$ とする. $X, Y \in U(\mathfrak{g})$

$$m(S\otimes id)\Delta(XY) = m(S\otimes id)(\sum x_i y_j \otimes x_i' y_j')$$
$$= m(\sum S(y_j)S(x_i)\otimes x_i' y_j') = \sum S(y_j)S(x_i)x_i' y_j'$$
$$= \sum_j S(y_j)(m(S\otimes id)\Delta(X))y_j' = \sum_j S(y_j)(u\circ\varepsilon)(X)y_j'$$
$$\cancel{= (u\circ\varepsilon)(X)\sum_j S(y_j)y_j' = (u\circ\varepsilon)(X)\cdot(u\circ\varepsilon)(Y)}$$
$$= u(\varepsilon(X)\varepsilon(Y)) = (u\circ\varepsilon)(XY)$$

同様に $m(id\otimes S)\Delta(XY) = (u\circ\varepsilon)(XY)$ が示せる。 //

2. $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ 以下 $\mathbb{C} \ni q \neq 0, \pm 1$ を固定する.

+ Def. 文字 $X^+ = E$, $X^- = F$, $K^{\pm} = q^{\pm H}$ を基底とする $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間の自由結合代数 (テンソル代数) を T とし.

$$U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) := T/I$$

ここで I は次の元で生成される両側イデアルとする.

$$I := (KK^{-1}-1,\ K^{-1}K-1,\ KX^+K^{-1} - q^2X^+,\ KX^-K^{-1} - q^{-2}X^-,$$
$$X^+X^- - X^-X^+ - \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}})$$

これを量子包絡環という。以下 $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ を U_q と略記する.

Prop 2.1 $\Delta(K^{\pm 1}) = K^{\pm 1}\otimes K^{\pm 1}$, $\Delta(X^+) = X^+\otimes 1 + K\otimes X^+$, $\Delta(X^-) = X^-\otimes K^{-1} + 1\otimes X^-$,

$\varepsilon(K^{\pm}) = 1$, $\varepsilon(X^{\pm}) = 0$,

$S(K^{\pm 1}) = K^{\mp 1}$, $S(X^+) = -K^{-1}X^+$, $S(X^-) = -X^-K$

と生成元に定め. U_q 全体の上には.

$\Delta : U_q \to U_q\otimes U_q$, $\varepsilon : U_q \to \mathbb{C}$ は代数射

$S : U_q \to U_q$ は反代数射

として拡張すれば. $(U_q, \Delta, \varepsilon, S)$ はホップ代数となる。

Proof. Δ, ε, S は well-defined.

$$\Delta(KK^{-1}-1) = \Delta(K)\Delta(K^{-1}) - \Delta(1) = (K\otimes K)(K^{-1}\otimes K^{-1}) - 1\otimes 1$$
$$= KK^{-1}\otimes KK^{-1} - 1\otimes 1$$
$$= (KK^{-1}-1)\otimes KK^{-1} + 1\otimes(KK^{-1}-1) \in I\otimes T + T\otimes I$$
$$\Delta(K^{-1}K-1) = \Delta(K^{-1})\Delta(K) - \Delta(1) = (K^{-1}\otimes K^{-1})(K\otimes K) - 1\otimes 1$$
$$= K^{-1}K\otimes K^{-1}K - 1\otimes 1 = (K^{-1}K-1)\otimes K^{-1}K + 1\otimes(K^{-1}K-1) \in I\otimes T + T\otimes I$$

$$\Delta(KX^+K^{-1} - q^2X^+) = \Delta(K)\Delta(X^+)\Delta(K^{-1}) - q^2\Delta(X^+)$$
$$= (K\otimes K)(X^+\otimes 1 + K\otimes X^+)(K^{-1}\otimes K^{-1}) - q^2(X^+\otimes 1 + K\otimes X^+)$$
$$= KX^+K^{-1}\otimes KK^{-1} + K^2K^{-1}\otimes KX^+K^{-1} - q^2X^+\otimes 1 - q^2K\otimes X^+$$
$$= (KX^+K^{-1} - q^2X^+)\otimes KK^{-1} + K^2K^{-1}\otimes(KX^+K^{-1} - q^2X^+)$$
$$+ q^2X^+\otimes(KK^{-1}-1) + K(KK^{-1}-1)\otimes q^2X^+ \in I\otimes J + J\otimes I$$

$$\Delta(KX^-K^{-1} - q^{-2}X^-) = \Delta(K)\Delta(X^-)\Delta(K^{-1}) - q^{-2}\Delta(X^-)$$
$$= (K\otimes K)(X^-\otimes K^{-1} + 1\otimes X^-)(K^{-1}\otimes K^{-1}) - q^{-2}(X^-\otimes K^{-1} + 1\otimes X^-)$$
$$= KX^{-1}K^{-1}\otimes KK^{-2} + KK^{-1}\otimes KX^{-1}K^{-1} - q^{-2}X^-\otimes K^{-1} - q^{-2}\,1\otimes X^-$$
$$= (KX^{-1}K^{-1} - q^{-2}X^-)\otimes KK^{-2} + KK^{-1}\otimes(KX^{-1}K^{-1} - q^{-2}X^-)$$
$$+ (KK^{-1}-1)\otimes q^{-2}X^- + q^{-2}X^-\otimes(KK^{-1}-1)K^{-1} \in I\otimes J + J\otimes I$$

$$\Delta\left(X^+X^- - X^-X^+ - \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}\right) = \Delta(X^+)\Delta(X^-) - \Delta(X^-)\Delta(X^+) - \frac{\Delta(K)-\Delta(K^{-1})}{q-q^{-1}}$$
$$= (X^+\otimes 1 + K\otimes X^+)(X^-\otimes K^{-1} + 1\otimes X^-) - (X^-\otimes K^{-1} + 1\otimes X^-)(X^+\otimes 1 + K\otimes X^+) - \frac{K\otimes K}{q-q^{-1}} + \frac{K^{-1}\otimes K^{-1}}{q-q^{-1}}$$
$$= X^+X^-\otimes K^{-1} + X^+\otimes X^- + KX^-\otimes X^+K^{-1} + K\otimes X^+X^- - X^-X^+\otimes K^{-1} - X^-K\otimes K^{-1}X^+ - X^+\otimes X^- - K\otimes X^-X^+$$
$$- \frac{K\otimes K}{q-q^{-1}} + \frac{K^{-1}\otimes K^{-1}}{q-q^{-1}}$$
$$= \left(X^+X^- - X^-X^+ - \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}\right)\otimes K^{-1} + K\otimes\left(X^+X^- - X^-X^+ - \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}\right)$$
$$+ KX^-\otimes X^+K^{-1} - X^-K\otimes K^{-1}X^+ - \frac{K\otimes K^{-1}}{q-q^{-1}} + \frac{K\otimes K^{-1}}{q-q^{-1}}$$

$$X^+K^{-1} = K^{-1}KX^+K^{-1} - (K^{-1}K-1)X^+K^{-1}$$
$$= q^2K^{-1}X^+ + K^{-1}(KX^+K^{-1} - q^2X^-) - (K^{-1}K-1)X^+K^{-1}$$
$$KX^{-1} = KX^-K^{-1}K - KX^-(K^{-1}K-1)$$
$$= q^{-2}X^-K + (KX^-K^{-1} - q^{-2}X^-)K - KX^-(K^{-1}K-1)$$

$$KX^-\otimes X^+K^{-1} - X^-K\otimes K^{-1}X^+$$
$$= \left(q^{-2}X^-K + (KX^-K^{-1} - q^{-2}X^-)K - KX^-(K^{-1}K-1)\right)\otimes\left(q^2K^{-1}X^+ + K^{-1}(KX^+K^{-1} - q^2X^-) - (K^{-1}K-1)X^+K^{-1}\right) - X^-K\otimes K^{-1}X^+$$
$$= \cancel{X^{-1}K\otimes K^{-1}X^+} + q^{-2}X^-K\otimes\{K^{-1}(KX^+K^{-1} - q^2X^-) + (K^{-1}K-1)X^+K^{-1}\}$$
$$+ \{(KX^-K^{-1} - q^{-2}X^-)K - KX^-(K^{-1}K-1)\}\otimes\{q^2K^{-1}X^+ + K^{-1}(KX^+K^{-1} - q^2X^-) - (K^{-1}K-1)X^+K^{-1}\}$$
$$- \cancel{X^{-1}K\otimes K^{-1}X^+} \in I\otimes J + J\otimes I$$

$$\varepsilon(KK^{-1}-1)=\varepsilon(K)\varepsilon(K^{-1})-\varepsilon(1)=1\cdot1-1=0\in\mathbb{C}$$
$$\varepsilon(K^{-1}K-1)=\varepsilon(K^{-1})\varepsilon(K)-\varepsilon(1)=1\cdot1-1=0\in\mathbb{C}$$
$$\varepsilon(KX^+K^{-1}-q^2X^+)=\varepsilon(K)\varepsilon(X^+)\varepsilon(K^{-1})-q^2\varepsilon(X^+)=1\cdot0\cdot1-q^2\cdot0=0\in\mathbb{C}$$
$$\varepsilon(KX^-K^{-1}-q^{-2}X^-)=\varepsilon(K)\varepsilon(X^-)\varepsilon(K^{-1})-q^{-2}\varepsilon(X^-)=1\cdot0\cdot1-q^{-2}\cdot0=0\in\mathbb{C}$$
$$\varepsilon\left(X^+X^--X^-X^+-\frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}\right)=\varepsilon(X^+)\varepsilon(X^-)-\varepsilon(X^-)\varepsilon(X^+)-\frac{\varepsilon(K)-\varepsilon(K^{-1})}{q-q^{-1}}$$
$$=0\cdot0-0\cdot0-\frac{1-1}{q-q^{-1}}=0\in\mathbb{C}$$

$$S(KK^{-1}-1)=S(K^{-1})S(K)-S(1)=KK^{-1}-1\in I$$
$$S(K^{-1}K-1)=S(K)S(K^{-1})-S(1)=K^{-1}K-1\in I$$
$$S(KX^+K^{-1}-q^2X^+)=S(K^{-1})S(X^+)S(K)-q^2S(X^+)$$
$$=K(-K^{-1}X^+)K^{-1}-q^2(-K^{-1}X^+)$$
$$=-\left[\{K^{-1}K+(KK^{-1}-1)-(K^{-1}K-1)\}X^+K^{-1}-q^2K^{-1}X^+\right]$$
$$=-K^{-1}(KX^+K^{-1}-q^2X^+)-(KK^{-1}-1)X^+K^{-1}+(K^{-1}K-1)X^+K^{-1}\in I$$
$$S(KX^-K^{-1}-q^{-2}X^-)=S(K^{-1})S(X^-)S(K)-q^{-2}S(X^-)$$
$$=K(-X^-K)K^{-1}-q^{-2}(-X^-K)$$
$$\equiv-KX^-K^{-1}K+q^{-2}X^-K=(KX^-K^{-1}-q^{-2}X^-)(-K)\pmod{I}\in I$$
$$S\left(X^+X^--X^-X^+-\frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}\right)=S(X^-)S(X^+)-S(X^+)S(X^-)-\frac{S(K)-S(K^{-1})}{q-q^{-1}}$$
$$=(-X^-K)(-K^{-1}X^+)-(-K^{-1}X^+)(-X^-K)-\frac{K^{-1}-K}{q-q^{-1}}$$
$$=X^-KK^{-1}X^+-K^{-1}X^+X^-K-\frac{K^{-1}-K}{q-q^{-1}}$$
$$\equiv X^-X^+-(q^{-2}X^+K^{-1})(q^2KX^-)-\frac{K^{-1}-K}{q-q^{-1}}$$
$$(\because X^+K^{-1}\equiv q^2K^{-1}X^+,\ KX^-\equiv q^{-2}X^-K)$$
$$\equiv X^-X^+-X^+X^--\frac{K^{-1}-K}{q-q^{-1}}$$
$$=-\left(X^+X^--X^-X^+-\frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}\right)\pmod{I}\in I$$

U_q, Δ, ε は双代数

余結合律をチェックする.

$$(\Delta\otimes id)\Delta(K^{\pm1})=K^{\pm1}\otimes K^{\pm1}\otimes K^{\pm1}=(id\otimes\Delta)\Delta(K^{\pm1})$$
$$(\Delta\otimes id)\Delta(X^+)=(\Delta\otimes id)(X^+\otimes1+K\otimes X^+)=(X^+\otimes1+K\otimes X^+)\otimes1+K\otimes K\otimes X^+$$
$$(id\otimes\Delta)\Delta(X^+)=(id\otimes\Delta)(X^+\otimes1+K\otimes X^+)=X^+\otimes1\otimes1+K\otimes(X^+\otimes1+K\otimes X^+)$$
$$(\Delta\otimes id)\Delta(X^-)=(\Delta\otimes id)(X^-\otimes K^{-1}+1\otimes X^-)=(X^-\otimes K^{-1}+1\otimes X^-)\otimes K^{-1}+1\otimes1\otimes X^-$$
$$(id\otimes\Delta)\Delta(X^-)=(id\otimes\Delta)(X^-\otimes K^{-1}+1\otimes X^-)=X^-\otimes K^{-1}\otimes K^{-1}+1\otimes(X^-\otimes K^{-1}+1\otimes X^-)$$

余単位律をチェックする。

$$(id\otimes\varepsilon)\circ\Delta(K^{\pm1}) = (id\otimes\varepsilon)(K^{\pm1}\otimes K^{\pm1}) = K^{\pm1}\otimes 1$$
$$(\varepsilon\otimes id)\circ\Delta(K^{\pm1}) = (\varepsilon\otimes id)(K^{\pm1}\otimes K^{\pm1}) = 1\otimes K^{\pm1}$$
$$(id\otimes\varepsilon)\circ\Delta(X^{+}) = (id\otimes\varepsilon)(X^{+}\otimes 1 + K\otimes X^{+}) = X^{+}\otimes 1$$
$$(\varepsilon\otimes id)\circ\Delta(X^{+}) = (\varepsilon\otimes id)(X^{+}\otimes 1 + K\otimes X^{+}) = 1\otimes X^{+}$$
$$(id\otimes\varepsilon)\circ\Delta(X^{-}) = (id\otimes\varepsilon)(X^{-}\otimes K^{-1} + 1\otimes X^{-}) = X^{-}\otimes 1$$
$$(\varepsilon\otimes id)\circ\Delta(X^{-}) = (\varepsilon\otimes id)(X^{-}\otimes K^{-1} + 1\otimes X^{-}) = 1\otimes X^{-}$$

$(U_q, \Delta, \varepsilon, S)$ はホップ代数.

$$m\circ(S\otimes id)\circ\Delta(K^{\pm1}) = m\circ(S\otimes id)(K^{\pm1}\otimes K^{\pm1}) = K^{\mp1}\cdot K^{\pm1} = 1 = u\circ\varepsilon(K^{\pm1})$$
$$m\circ(S\otimes id)\circ\Delta(X^{+}) = m\circ(S\otimes id)(X^{+}\otimes 1 + K\otimes X^{+}) = -K^{-1}X^{+}\cdot 1 + K^{-1}\cdot X^{+} = 0 = u\circ\varepsilon(X^{+})$$
$$m\circ(S\otimes id)\circ\Delta(X^{-}) = m\circ(S\otimes id)(X^{-}\otimes K^{-1} + 1\otimes X^{-}) = -X^{-}K\cdot K^{-1} + 1\cdot X^{-} = 0 = u\circ\varepsilon(X^{-})$$

三角分解

記号. $N^{\pm} :=$ $X^{\pm}$ が生成する U_q の部分代数.

$T :=$ K, K^{-1} が生成する U_q の部分代数.

$$[n] := [n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \qquad ([1]_q = 1)$$

また、不定文字 $\xi^{\pm}, \xi$ を導入して、

$$\tilde{N}^{\pm} := \mathbb{C}[\xi^{\pm}], \quad \tilde{T} := \mathbb{C}[\xi, \xi^{-}]$$

線型写像 $\rho : \tilde{N}^{-}\otimes\tilde{T}\otimes\tilde{N}^{+} \longrightarrow U_q$ $(l, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, m\in\mathbb{Z})$

$$(\xi^{-})^{l}\otimes\xi^{m}\otimes(\xi^{+})^{n} \longmapsto (X^{-})^{l}K^{m}(X^{+})^{n}$$

と定義する. well-defined は. $\hat{\rho} : \tilde{N}^{-}\times\tilde{T}\times\tilde{N}^{+} \longrightarrow U_q$ の双線型性から成り立つ.