Thm 2.1 (三角分解) ρ はベクトル空間の同型を与える。
i.e. U_q の任意の元は $(X^-)^l K^m (X^+)^n$ ($l, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m \in \mathbb{Z}$) の形の一次結合で一意的に表される。

Lemma 2.1 自然数 l に対し、U_q 上で

$$[X^+, (X^-)^l] = [l](X^-)^{l-1}[H-l+1], \quad [(X^+)^l, X^-] = [l][H-l+1](X^+)^{l-1}$$

ただし、

$$[H+\nu] := \frac{q^\nu K - q^{-\nu} K^{-1}}{q - q^{-1}} \in U_q$$

∵ $l=1$ のとき、$[X^+, X^-] = X^+X^- - X^-X^+ \equiv \dfrac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} = [H] \pmod{I}$

l のときに正しいとする。

$$\begin{aligned}
[X^+, (X^-)^{l+1}] &= X^+(X^-)^{l+1} - (X^-)^{l+1}X^+ \\
&= X^+(X^-)(X^-)^l - (X^-)(X^+)(X^-)^l + (X^-)(X^+)(X^-)^l - (X^-)(X^-)^l X^+ \\
&= [X^+, X^-](X^-)^l + X^-[X^+, (X^-)^l] \\
&\equiv [H](X^-)^l + X^-[l](X^-)^{l-1}[H-l+1]
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
[H+\nu]X^- &= \frac{q^\nu K X^- - q^{-\nu} K^{-1} X^-}{q - q^{-1}} \equiv \frac{q^\nu q^{-2} X^- K - q^{-\nu} q^2 X^- K^{-1}}{q - q^{-1}} \\
&= X^- \frac{q^{\nu-2} K - q^{-(\nu-2)} K}{q - q^{-1}} \equiv X^- [H + \nu - 2]
\end{aligned}$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned}
[X^+, (X^-)^{l+1}] &= [H](X^-)^l + (X^-)^l [l][H-l+1] \\
&= (X^-)^l ([H-2l] + [l][H-l+1]) \\
&= (X^-)^l \left(\frac{q^{-2l}K - q^{2l}K^{-1}}{q - q^{-1}} + \frac{q^l - q^{-l}}{q - q^{-1}} \frac{q^{-l+1}K - q^{l-1}K^{-1}}{q - q^{-1}} \right) \\
&= (X^-)^l \frac{\cancel{q^{-2l+1}K} - q^{2l+1}K^{-1} - q^{2l-1}K + \cancel{q^{2l-1}K^{-1}} + qK - \cancel{q^{2l-1}K^{-1}} - \cancel{q^{-2l+1}K} + q^{-1}K^{-1}}{(q - q^{-1})^2} \\
&= (X^-)^l \frac{(q^{l+1} - q^{-l-1})(q^{-l}K - q^l K^{-1})}{(q - q^{-1})(q - q^{-1})} \\
&= (X^-)^l [l+1][H-l] \quad //
\end{aligned}$$

Proof.

1. ρ は全射であることを示す。

生成元の任意のテンソル積 $y = y_1 \cdots y_p$ ($y_i \in \{X^+, X^-, K^{\pm 1}\}$) が、$(X^-)^l K^m (X^+)^n$ の形に表されることを示せばよい。p についての帰納法で示す。$P=1$ のときは明らかに成り立つ。$p-1$ まで成り立つと仮定する。
$y = y_1 \cdots y_p$ の y_1 が X^- のとき、帰納法の仮定から結論は正しい。

y_i の中に $K^{\pm1}$ があるとき $KK^{-1}=K^{-1}K$, $KX^{\pm}=q^{\pm2}X^{\pm}K$ を使って $K^{\pm1}$ を先頭にもって来れる。帰納法の仮定より $y_2\cdots y_p$ は $(X^-)^l K^m (X^+)^n$ の形にできて、また $KX^-=q^{-2}X^-K$ により $q^{-2l}(X^-)^l K^{m+1}(X^+)^n$ にできる。$y_1=\cdots=y_r=X^+$, $y_{r+1}=X^-$ のとき、$y'=y_{r+2}\cdots y_p$ とおく。

$$y=(X^+)^r X^- y' = \{(X^+)^r X^- - X^-(X^+)^r\}y' + X^-(X^+)^r y'$$
$$= [(X^+)^r, X^-]y' + X^-(X^+)^r y'$$
$$= [r][H-r+1](X^+)^{r-1}y' + X^-(X^+)y' \quad (\because \text{Lemma 2})$$

を得て、上の場合に帰着する。

2. 次の作用によって M は U_q 加群となる。
まず $\rho' : \mathcal{T}\times M \to M$ を

$$(X^-, (\xi^-)^l\otimes\xi^m\otimes(\xi^+)^n)\mapsto(\xi^-)^{l+1}\otimes\xi^m\otimes(\xi^+)^n$$
$$(K^{\pm1}, (\xi^-)^l\otimes\xi^m\otimes(\xi^+)^n)\mapsto q^{\mp2l}(\xi^-)^l\otimes\xi^{m\pm1}\otimes(\xi^+)^n$$
$$(X^+, (\xi^-)^l\otimes\xi^m\otimes(\xi^+)^n)\mapsto\frac{[l]}{q-q^{-1}}\left(q^{-l+1}(\xi^-)^{l-1}\otimes\xi^{m+1}\otimes(\xi^+)^n - q^{l-1}(\xi^-)^{l-1}\otimes\xi^{m-1}\otimes(\xi^+)^n\right) + q^{-2m}(\xi^-)^l\otimes\xi^m\otimes(\xi^+)^{n+1}$$

と生成元に定義して双線型 $\mathcal{T}\to\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$ の代数射 になるように拡張して定義する。双線型に拡張するので ρ' は well-defined で自由結合代数 $\mathcal{T}$ 上の加群になる。

$$\tilde{\rho}' : U_q\times M\to M \ ; \ ([x], m)\mapsto \rho'(x,m)$$

が well-defined になることを示せばよい。

$$\rho'(KK^{-1}-1, (\xi^-)^l\otimes\xi^m\otimes(\xi^+)^n) = KK^{-1}(\xi^-)^l\otimes\xi^m\otimes(\xi^+)^n - (\xi^-)^l\otimes\xi^m\otimes(\xi^+)^n$$
$$= K\cdot q^{2l}(\xi^-)^l\otimes\xi^{m-1}\otimes(\xi^+)^n - (\xi^-)^l\otimes\xi^m\otimes(\xi^+)^n$$
$$= q^{2l}\cdot q^{-2l}(\xi^-)^l\otimes\xi^{m-1+1}\otimes(\xi^+)^n - (\xi^-)^l\otimes\xi^m\otimes(\xi^+)^n = 0$$

$$\rho'(KX^+K^{-1}-q^2X^+, (\xi^-)^l\otimes\xi^m\otimes(\xi^+)^n) = q^{2l}KX^+(\xi^-)^l\otimes\xi^{m-1}\otimes(\xi^+)^n -$$
$$- q^2\frac{[l]}{q-q^{-1}}\left(q^{-l+1}(\xi^-)^{l-1}\otimes\xi^{m+1}\otimes(\xi^+)^n - q^{l-1}(\xi^-)^{l-1}\otimes\xi^{m-1}\otimes(\xi^+)^n\right)$$
$$- q^{-2m+2}(\xi^-)^l\otimes\xi^m\otimes(\xi^+)^{n+1}$$

$$= q^{2l}K\left\{\frac{[l]}{q-q^{-1}}\left(q^{-l+1}(\xi^-)^{l-1}\otimes\xi^m\otimes(\xi^+)^n - q^{l-1}(\xi^-)^{l-1}\otimes\xi^{m-2}\otimes(\xi^+)^n\right) + q^{-2(m-1)}(\xi^-)^l\otimes\xi^{m-1}\otimes(\xi^+)^{n+1}\right\}$$
$$- q^2\frac{[l]}{q-q^{-1}}\left(q^{-l+1}(\xi^-)^{l-1}\otimes\xi^{m+1}\otimes(\xi^+)^n - q^{l-1}(\xi^-)^{l-1}\otimes\xi^{m-1}\otimes(\xi^+)^n\right) - q^{-2m+2}(\xi^-)^l\otimes\xi^m\otimes(\xi^+)^{n+1} = 0$$

3. ρは単射である.

$$\sigma : U_q \to M \ ; \ a \mapsto \tilde{\rho}'(a, (\xi^-)^0 \otimes \xi^0 \otimes (\xi^+)^0)$$

と定義すれば

$$\sigma \circ \rho\left((\xi^-)^l \otimes \xi^m \otimes (\xi^+)^n\right) = \sigma\left((X^-)^l K^m (X^+)^n\right)$$

$$= \tilde{\rho}'\left((X^-)^l K^m (X^+)^n, (\xi^-)^0 \otimes \xi^0 \otimes (\xi^+)^0\right) = (X^-)^l K^m (X^+)^n (\xi^-)^0 \otimes \xi^0 \otimes (\xi^+)^0$$

$$= (X^-)^l K^m (X^+)^{n-1}\left(\frac{[0]}{q-q^{-1}}\left(q(\xi^-)^{-1} \otimes \xi^1 \otimes (\xi^+)^0 - q^{-1}(\xi^-)^{-1} \otimes \xi^{-1} \otimes (\xi^+)^0\right) + q^0 (\xi^-)^0 \otimes \xi^0 \otimes (\xi^+)^1\right)$$

$$= (X^-)^l K^m (X^+)^{n-1} (\xi^-)^0 \otimes \xi^0 \otimes (\xi^+)^1 \qquad (\because [0] = 0)$$

$$= (X^-)^l K^m (\xi^-)^0 \otimes \xi^0 \otimes (\xi^+)^n$$

$$= (X^-)^l K^{m-1} q^0 (\xi^-)^0 \otimes \xi^1 \otimes (\xi^+)^n = (X^-)^l (\xi^-)^0 \otimes \xi^m \otimes (\xi^+)^n$$

$$= (\xi^-)^l \otimes \xi^m \otimes (\xi^+)^n$$

$$\therefore \ \sigma \circ \rho = id \qquad //$$

カシミール元

<u>Def.</u> $Z := \{a \in U_q \mid \forall x \in U_q$に対して$ax = xa\}$ をU_qの中心という.

$$C := \frac{qK - 2 + q^{-1}K^{-1}}{(q-q^{-1})^2} + X^-X^+ = \frac{q^{-1}K - 2 + qK^{-1}}{(q-q^{-1})^2} + X^+X^- \in U_q$$ をU_qのカシミール元という.

<u>well-defined</u>

$$\frac{qK - 2 + q^{-1}K^{-1}}{(q-q^{-1})^2} + X^-X^+ - \frac{q^{-1}K - 2 + qK^{-1}}{(q-q^{-1})^2} - X^+X^-$$

$$= \frac{(q-q^{-1})K - (q-q^{-1})K^{-1}}{(q-q^{-1})^2} - (X^+X^- - X^-X^+) = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} - [X^+, X^-] = 0.$$

<u>Prop. 2.2</u> $C \in Z$

<u>Proof.</u>

$$CK^{\pm1} = \frac{qKK^{\pm1} - 2K^{\pm1} + q^{-1}K^{-1}K^{\pm1}}{(q-q^{-1})^2} + X^-X^+K^{\pm1} \equiv \frac{qK^{\pm1}K - 2K^{\pm1} + q^{-1}K^{\pm1}K^{-1}}{(q-q^{-1})^2} + X^- q^{\pm2} K^{\pm1} X^+$$

$$\equiv \frac{qK^{\pm1}K - 2K^{\pm1} + q^{-1}K^{\pm1}K}{(q-q^{-1})^2} + q^{\pm2} q^{\mp2} K^{\pm1} X^- X^+ = K^{\pm1} C$$

$$CX^+ = \frac{qKX^+ - 2X^+ + q^{-1}K^{-1}X^+}{(q-q^{-1})^2} + X^-X^+X^+ \equiv \frac{qKX^+ - 2X^+ + q^{-1}K^{-1}X^+}{(q-q^{-1})^2} + \left(X^+X^- - \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}\right)X^+$$

$$= \frac{qKX^+ - 2X^+ + q^{-1}K^{-1}X^+ - (q-q^{-1})(KX^+ - K^{-1}X^+)}{(q-q^{-1})^2} + X^+X^-X^+$$

$$= \frac{q^{-1}KX^+ - 2X^+ + qK^{-1}X^+}{(q-q^{-1})^2} + X^+X^-X^+ \equiv \frac{qX^+K - 2X^+ + q^{-1}X^+K^{-1}}{(q-q^{-1})^2} + X^+X^-X^+$$

$$= X^+C$$

No.

$$CX^- = \frac{\cancel{qKX^- - 2X^- + q^{-1}KX^-}}{(q-q^{-1})^2} + X^-X^+X^- = \frac{q^{-1}X^-K - 2X^- + qX^-K^{-1}}{(q-q^{-1})^2} + X^-X^+X^- = X^-C$$

Thm.2.2 q が1の巾根でなければ $Z \cong \mathbb{C}[C]$

Proof. $f : \mathbb{C}[C] \to Z$; $\varphi(c) \mapsto \varphi(C)$; 線型写像 とする.

(単射) $a_1C + a_2C^2 + a_3C^3 + \cdots + a_nC^n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ を n に関する数学的帰納法で示す。($a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$)

$n=1$ のとき成り立つのは明らか。$n-1$ まで成り立つと仮定する。

$$a_n \cdot C^n = a_n(X^-X^+)^n + a_n(\text{低次の項})$$

であるから $(X^-X^+)^n$ の係数 a_n は0である(∵表示の一意性)。帰納法の仮定により $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ が成り立つ.

(全射) Thm1. の三角分解により U_q の元は $\sum C_{mn}(K)(X^-)^m(X^+)^n$ ($C_{mn}(K) \in \mathbb{C}[K, K^{-1}]$) の形にも一意的に表示できる. このうち K と可換なものは q が1の巾根でないので

$$z = \sum_{n=0}^{N} C_n(K)(X^-)^n(X^+)^n$$

の形でなくてはならない。$z \in Z$ ならば

$$0 = X^+z - zX^+ = \sum_{n=0}^{N} C_n(q^{-2}K)X^+(X^-)^n(X^+)^n - \sum_{n=0}^{N} C_n(K)(X^-)^n(X^+)^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} C_n(q^{-2}K)\{(X^-)^nX^+ + [X^+, (X^-)^n]\}(X^+)^n - \sum_{n=0}^{N} C_n(K)(X^-)^n(X^+)^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} (C_n(q^{-2}K) - C_n(K))(X^-)^n(X^+)^{n+1}$$

$$+ \sum_{n=0}^{N} C_n(q^{-2}K)[n][H+n-1](X^-)^{n-1}(X^+)^n \quad (\because \text{Lemma } 2)$$

$(X^-)^N(X^+)^{N+1}$ の係数 $C_N(q^{-2}K) - C_N(K)$ は0である。q が1の巾根でないので、$C_N(K)$ は K に依然しない。$C_N(K) = C_N \in \mathbb{C}$ とおく.

$$C^N = (X^-X^+)^N + (\text{低次の項})$$

なので. $z - C_NC^N = (N-1)$ 次以下 なので N に関する帰納法から、$z = \varphi(C)$ となる多項式 $\varphi(x) \in \mathbb{C}[x]$ の存在がいえる.