量子群とヤン・バクスター方程式 No.2

3. $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ の表現(1.)

4. $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ の表現(2)

3. $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ の表現論(1)

Def. ホップ代数Aの表現 (π, V) とは、ベクトル空間Vと代数射
$$\pi : A \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$$
の組をいう。

Vが既約であるとは $V \neq \{0\}$ であって、Vに含まれるA部分加群が $\{0\}$ とV以外にないことをいう。

2つの表現 (π, V), (π', V') が同値であるとは、ベクトル空間の同型 $f : V \longrightarrow V'$ が存在して、可換図式

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi(a)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V' \arrow[d, "\pi'(a)"] \\
V \arrow[r, "f"] & V'
\end{tikzcd}$$

が任意の $a \in A$ について成り立つことをいう。
以下、$A = U_q$

ex.1 $V = \mathbb{C}^2$ として、$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \cong \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ とみなす。
$$\pi(X^+) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi(X^-) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi(K) := \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

ex.2 $l = 0, 1, 2, \cdots$ に対し、$V = \mathbb{C}^{l+1}$ なる表現を考える。$l = 0$ のとき $V = \mathbb{C}$
$\pi(X^\pm) = 0$, $\pi(K) = 1$ という自明な表現とする。

$$\pi_l(X^+) := \begin{pmatrix} 0 & [l] & & & \\ & 0 & [l-1] & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & [1] \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_l(X^-) := \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ [1] & 0 & & & \\ & [2] & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & [l] & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_l(K) := \mathrm{diag}(q^l, q^{l-2}, \cdots, q^{-l})$$

$l = 1$ のときが ex.1 である。

well-defined

$$\pi_l(KX^+K^{-1} - q^2X^+) = \pi_l(K)\pi_l(X^+)\pi_l(K^{-1}) - q^2\pi_l(X^+)$$

$$= \begin{pmatrix} q^l & & & \\ & q^{l-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & q^{-l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & [l] & & \\ & 0 & [l-1] & \\ & & \ddots & [1] \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^{-l} & & & \\ & q^{-l+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & q^{l} \end{pmatrix} - q^2 \begin{pmatrix} 0 & [l] & & \\ & 0 & [l-1] & \\ & & \ddots & [1] \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & q^l[l] & & \\ & 0 & q^{l-2}[l-1] & \\ & & \ddots & q^{-l}[1] \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^{-l} & & & \\ & q^{-l+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & q^{l} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & q^2[l] & & \\ & 0 & q^2[l-1] & \\ & & \ddots & q^2[1] \\ & & & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$[\pi_l(X^+), \pi_l(X^-)] = \begin{pmatrix} 0 & [l][1] & & & \\ & & [l-1][2] & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [1][l] \\ & & & & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ [1][l] & & & & \\ & [2][l-1] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [l][1] & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{diag}([l], [l-2], \cdots, [-l]) \quad (\because [l-j][j+1] - [j][l-j+1] = [l-2j])$$

$$= \frac{\pi_l(K) - \pi_l(K^{-1})}{q - q^{-1}}$$

以下、この表現を $(\pi_l, V(l))$ とかく。

ex.3. U_q の自己同型写像 $\iota : U_q \to U_q$

$$X^+ \mapsto -X^+, \quad X^- \mapsto X^-, \quad K \to -K$$

と表現 (π, V) に対して、合成 $(\pi \circ \iota, V)$ も U_q の表現となる。

Prop. 3.1. ホップ代数 A の表現 (π, V) に対して、V は A-加群となる。

Proof. $A \times V \to V$; $(a, v) \mapsto (\pi(a))(v)$

(1) $\pi(1_A) = id_V$ ($\because$ π は代数射) $\therefore (\pi(1_A))(v) = v$

(2) $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ ($\because$ π は代数射) $\therefore (\pi(ab))(v) = (\pi(a) \circ \pi(b))(v)$
$= \pi(a)(\pi(b)(v))$

(3) $\pi(a+b) = \pi(a) + \pi(b)$ ($\because$ π は線型写像) $\therefore (\pi(a+b))(v) = \pi(a)(v) + \pi(b)(v)$

(4) $\pi(a) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ なので $\pi(a)(v+w) = \pi(a)(v) + \pi(a)(w)$

以下、V を A-加群とみて π を省略することがある。

最高ウェイト表現

以下、q は 1 の巾根でない と仮定する。

Def. U_q 加群 V と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し

$$V_\lambda := \{ v \in V \mid Kv = q^\lambda v \}$$

とおく。$V_\lambda \neq 0$ のとき λ を V のウェイトとよび、V_λ を V のウェイト空間、その元をウェイト λ のウェイトベクトルという。

No.

Prop 3.2. $X^{\pm} V_\lambda \subset V_{\lambda \pm 2}$

Proof. ${}^\forall v \in V_\lambda$ に対して.

$$K(X^{\pm} v) = K X^{\pm} K^{-1} K v = q^{\pm 2} X^{\pm} q^{\lambda} v = q^{\lambda \pm 2}(X^{\pm} v)$$

Def. U_q加群 V の元 v が最高ウェイト $k \in \mathbb{C}$ をもつ最高ウェイトベクトルであるとは. $v \neq 0$ であって.

(i) $V = U_q \cdot v$

(ii) $X^+ v = 0$, $Kv = q^k v$

が成り立つことをいう. 最高ウェイトベクトルをもつ V を最高ウェイト加群とよぶ。

Prop 3.3. V を最高ウェイト加群, kを最高ウェイト, v_k を最高ウェイトベクトルとする.

(1) V は ウェイト空間の直和で

$$V = \bigoplus_{j \geq 0} V_{k-2j} \quad (V_{k-2j} = \mathbb{C}(X^-)^j v_k)$$

(2) V はただ1つの極大真部分加群 W をもつ. このとき V/W は既約な最高ウェイト加群である.

Lemma 3.4 V をベクトル空間, $f_1, \cdots, f_m \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ を可換な作用素とし.その同時固有空間を $V_\mu = \{ v \in V \mid f_i v = \mu_i v \ (1 \leq {}^\forall i \leq m) \}$ $(\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_m) \in \mathbb{C}^m)$ とする。 $V = \sum_{\mu \in \mathbb{C}^m} V_\mu$ ならば 右辺は直和である.

(∵) $m = 1$ のとき 任意の相異なる $\mu_1, \cdots, \mu_N \in \mathbb{C}$ に対して.

$$v_{\mu_1} + \cdots + v_{\mu_N} = 0 \quad (v_{\mu_i} \in V_{\mu_i}, \ i = 1, \cdots, N)$$

であるとすれば. f_1 を j 回施すことにより

$$\mu_1^j v_{\mu_1} + \cdots + \mu_N^j v_{\mu_N} = 0$$

が成り立つ. $j = 0, 1, \cdots, N-1$ ととれば.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_1^{N-1} & \mu_2^{N-1} & \cdots & \mu_N^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{\mu_1} \\ v_{\mu_2} \\ \vdots \\ v_{\mu_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1^{N-1} & \mu_2^{N-1} & \cdots & \mu_N^{N-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (\mu_j - \mu_i)$ であり $\mu_1, \cdots, \mu_N$ は相異なるので $\prod_{i<j} (\mu_j - \mu_i) \neq 0$ 故に $v_{\mu_1} = v_{\mu_2} = \cdots = v_{\mu_N} = 0$.

No.

$$V = \sum_{\mu \in \mathbb{C}^m} V_\mu = \sum_{\mu_m \in \mathbb{C}} \Big(\sum_{\mu' \in \mathbb{C}^{m-1}} V_{\mu', \mu_m} \Big) \quad \big(V_{\mu', \mu_m} = \{ v \in V \mid f_i v = \mu_i v \ (1 \le {}^\forall i \le m-1), \ f_m v = \mu_m v \} \big)$$

$$= \bigoplus_{\mu_m \in \mathbb{C}} \Big(\sum_{\mu' \in \mathbb{C}^{m-1}} V_{\mu', \mu_m} \Big) \quad (m=1 \text{ のときは成り立つ})$$

∴ 以下同様にして すべて直和に なおせる. //

・Prop 3.3の証明.

(1) $V = U_q \cdot v_k = N^- T N^+ \cdot v_k$ (∵ 三角分解)

$= N^- T \cdot v_k$ (∵ $X^+ v_k = 0$)

$= N^- \cdot v_k$ (∵ $K \cdot v_k = q^k v$)

$= \sum_{j \ge 0} \mathbb{C} (X^-)^j \cdot v_k$

$(X^-)^j v$ は 0であるか. Prop 3.2 より ウェイト $k-2j$ をもつウェイトベクトルとなる $\{q^{k-2j}\}_{j \ge 0}$ は相異なるから. Lemma 3.4より

$$V = \bigoplus_{j \ge 0} \mathbb{C} (X^-)^j v_k = \bigoplus_{j \ge 0} V_{k-2j}$$

(2) W' を V の真部分加群とする。このとき (1) および Lemmaから.

$$W' = \bigoplus_{j \ge 0} W'_{k-2j} \quad (W'_{k-2j} = W' \cap V_{k-2j})$$

とウェイト空間の直和で表せる.

ここで $W'_k \ne \{0\}$ とすると $W' \cap V_k \ne \{0\}$ つまり $W' \cap \mathbb{C}\langle v_k \rangle \ne \{0\}$

${}^\exists v \in W' \cap V_k$ で $v \in W'$ より.

$$v = C_k v_k + C_{k-2} v_{k-2} + C_{k-4} v_{k-4} + \cdots + C_{k-2n} v_{k-2n}$$

$$Kv = q^k v = C_k q^k v_k + C_{k-2} q^{k-2} v_{k-2} + \cdots + C_{k-2n} q^{k-2n} v_{k-2n} \quad \cdots ①$$

$$q^k v = C_k q^k v_k + C_{k-2} q^k v_{k-2} + \cdots + C_{k-2n} q^k v_{k-2n} \quad \cdots ②$$

① − ② より $C_{k-2}(q^{-2}-1) v_{k-2} + \cdots + C_{k-2n}(q^{-2n}+1) v_{k-2n} = 0$

$v_{k-2}, \cdots, v_{k-2n}$ は一次独立で q は1の巾根ではないので.

$C_{k-2} = \cdots = C_{k-2n} = 0$ ∴ $v_k \in W'$ で $V = U_q \cdot v_k$ より $W' \ne V$ に反する.

すべての真部分加群の和 W は また Vの真部分加群となる.

(∵ $W'_i \subset \bigoplus_{j>0} V_{k-2j}$ なので $W = \sum_i W'_i \subset \bigoplus_{j>0} V_{k-2j} \subsetneq V$).

$W' \subset \bigoplus_{j>0} V_{k-2j}$

$\bar{v}_k \in V/W$ に対して. $U_q \cdot \bar{v}_k = V/W$, $X^+ \bar{v}_k = \bar{0}$, $K \bar{v}_k = q^k \bar{v}_k$ は成り立つので. V/W は最高ウェイト加群である.

$V/W \supset \overline{W}_1$; 部分加群とすると. $f: V \to V/W$; $v \mapsto \bar{v}$ は準同型なので $f^{-1}(\overline{W}_1)$ は Vの部分加群であるから. $f^{-1}(\overline{W}_1) \subset W$

よって $\overline{W}_1$ は V/Wで自明な部分加群.