No.

有限次元既約表現

Prop. 3.5 有限次元の U_q 加群 V が既約ならば K は V 上対角化可能である。

Proof. V の部分空間 W であって、$K|_W$ が対角化可能となる極大なものをとる。$^\exists w \in W$ s.t. $X^+ w \notin W$ と仮定する。K は W の上で対角化可能だから、

$$W = \bigoplus W_j \quad (W_j \text{ は } K \text{ の固有空間})$$

と直和分解できる。$X^+ w \notin W$ なので $^\exists w_j \in W_j$ s.t. $X^+ w_j \notin W$

$$K X^+ w_j = q^2 X^+ K w_j = q^2 X^+ \alpha w_j \quad (\because w_j \in W_j)$$
$$= \alpha q^2 X^+ w_j$$

故に $X^+ w_j$ はまた K の固有ベクトルであるから V の部分空間 $W \oplus \mathbb{C} X^+ w_j$ は $K|_{W \oplus \mathbb{C} X^+ w_j}$ が対角化可能となり W の極大性に矛盾する。故に $X^+ W \subset W$　X^- も同様にして $X^- W \subset W$
故に W は U_q 部分加群となる。V は既約なので $V = W$ または $W = \{0\}$。$V \neq \{0\}$ なので $0 \neq ^\exists v \in V$ で $Kv =$
diag (q

Prop 3.6. V を有限次元 U_q 加群とする。このとき V 上で $X^\pm$ は巾零、すなわち $^\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $(X^\pm)^N V = \{0\}$

Proof. $0 \neq ^\exists v \in V$ s.t. $X^\pm v = cv$ とすれば $^\forall m \in \mathbb{N}$ に対して

$$X^\pm (K^{\mp m} v) = c q^{2m} (K^{\mp m} v) \quad \left(\because \begin{array}{l} X^\pm K^{-1} = q^{\pm 2} K^{-1} X^\pm, \\ X^\pm K = q^{\mp 2} K X^\pm \end{array}\right)$$

したがって cq^{2m} はすべて $X^\pm$ の固有値となる。q は 1 の巾根でないから $c \neq 0$ ならば これらはすべて異なり、$X^\pm$ の固有値が無限個あることになって V の有限次元性に矛盾する。$\therefore c = 0$.
故に $X^\pm$ の V 上の固有値はすべて 0. //

Prop 3.7. 有限次元 U_q 加群 V が 最高ウェイト $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ をもつ最高ウェイト加群ならば、V は $(\pi_l, V(l))$ に同値であり、適当な基底 $\{v_{l-2j}\}_{0 \leq j \leq l}$ に対し

$$X^+ v_{l-2j} = [l-j+1] v_{l-2j+2}$$
$$X^- v_{l-2j} = [j+1] v_{l-2j-2}$$
$$K v_{l-2j} = q^{l-2j} v_{l-2j}$$

が成り立つ。ただし、$j < 0$ または $j > l$ に対して $v_j = 0$

KYOKUTO

No.

Proof. 最高ウェイトベクトル v_l をとり, $j=0,1,2,\cdots$ に対して,

$$v_{l-2j} := \frac{(X^-)^j}{[j]!} v_l$$

$$X^+ v_{l-2j} = \frac{1}{[j]!} X^+ (X^-)^j v_l = \frac{1}{[j]!} \left([X^+, (X^-)^j] + (X^-)^j X^+ \right) v_l$$

$$= \frac{1}{[j]!} [X^+, (X^-)^j] v_l \quad (\because X^+ v_l = 0)$$

$$= \frac{1}{[j]!} [j] (X^-)^{j-1} [H-j+1] v_l$$

$$= \frac{(X^-)^{j-1}}{[j-1]!} \frac{q^{-j+1}K - q^{j-1}K^{-1}}{q-q^{-1}} v_l = \frac{(X^-)^{j-1}}{[j-1]!} \frac{q^{-j+1}q^l - q^{j-1}q^{-l}}{q-q^{-1}} v_l$$

$$= \frac{(X^-)^{j-1}}{[j-1]!} v_l [l-j+1] = [l-j+1] v_{l-2(j-1)} = [l-j+1] v_{l-2j+2}$$

$$X^- v_{l-2j} = \frac{1}{[j]!} X^- (X^-)^j v_l = \frac{(X^-)^{j+1}}{[j+1]!} v_l [j+1]$$

$$= [j+1] v_{l-2(j+1)} = [j+1] v_{l-2j-2}$$

$$K v_{l-2j} = \frac{1}{[j]!} K (X^-)^j v_l = \frac{1}{[j]!} q^{-2j} (X^-)^j K v_l \quad (\because K X^- = q^{-2} X^- K)$$

$$= \frac{1}{[j]!} q^{-2j} (X^-)^j q^l v_l = q^{l-2j} \frac{(X^-)^j}{[j]!} v_l = q^{l-2j} v_{l-2j}$$

Prop 3.6 より $\frac{(X^-)^{m+1}}{[m+1]!} v_l = v_{l-2(m+1)} = 0$ となる最小の $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在する.

$$0 = X^+ v_{l-2(m+1)} = [l-(m+1)+1] v_{l-2m} = [l-m] v_{l-2m}$$

故に $[l-m]=0$ なので $m=l$ を得る。

$$\therefore V = \bigoplus_{j=0}^{l} \mathbb{C} v_{l-2j}$$

基底 $\{v_{l-2j}\}$ に関して $X^\pm$, K の作用を行列表示したものが $(\pi_l, V(l))$ となる。//

Thm. 3.8. U_q の $(l+1)$ 次元既約表現を (π, V) とする。このとき (π, V) または $(\pi\circ\iota, V)$ は表現 $(\pi_l, V(l))$ と同値である。逆に $(\pi_l, V(l))$ はすべて既約である。

Proof. Prop. 3.6 より $\exists v\in V$ s.t. $X^+v=0$ かつ $v\neq 0$

∴ Prop 3.5 より V は K の固有空間の直和だから、はじめから v を K の固有ベクトルの和で一意にかける

$$v=\sum_{i=1}^{n} c_i v_i \quad , \quad K v_i = k_i v_i$$

Prop 3.6 より $(X^-)^{l_i+1}v_i=0$ となる最小の整数 $l_i\geqq 0$ がとれる

$$l := \min\{l_i \mid 1\leq i\leq n\}$$

としたとき

$$0 = X^+(X^-)^{l+1}v = \left([X^+,(X^-)^{l+1}] + (X^-)^{l+1}X^+\right)v$$
$$= [X^+,(X^-)^{l+1}]v \quad (\because X^+v=0)$$
$$= [X^+,(X^-)^{l+1}]\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = \sum_{i=1}^{n} c_i [X^+,(X^-)^{l+1}]v_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} c_i (X^-)^l [l+1][H-l]v_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} c_i [l+1] \frac{k_i q^{-l} - k_i^{-1}q^{l}}{q-q^{-1}} (X^-)^l v_i$$

ここで $(X^-)^l v_i\neq 0$ かつ $(X^-)^l v_i$ は K の固有ベクトル

Lemma. 3.4 より $k_i q^{-l} - k_i^{-1} q^{l} = 0$

$$\therefore\ k_i = \pm q^l$$

自己同型 ι を用いれば $k_i = q^l$ として一般性を失わない。∴ $Kv=q^l v$

V の U_q 部分加群 $U_q\cdot v$ は V が既約なので $V=U_q\cdot v$

よって V は最高ウェイト l をもつ最高ウェイト加群となる。Prop 3.7 により V は $(\pi_l, V(l))$ に同値。

$V(l)$ の 0 でない U_q 部分加群を W とする。W の元はウェイトベクトルの1次結合でかけるから、$w\in W$ に対して

$$w = \sum_{i=1}^{l} c_i v_i$$
$$Kw = \sum_{i=1}^{l} c_i q^i v_i$$
$$\vdots$$
$$K^{l-1}w = \sum_{i=1}^{l} c_i q^{i+l-1} v_i$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ q^1 & q^2 & \cdots & q^l \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ q^l & q^{l+2} & \cdots & q^{2l-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 v_1 \\ c_2 v_2 \\ \vdots \\ c_l v_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ Kw \\ \vdots \\ K^{l-1}w \end{pmatrix}$$

左の行列は正則なので v_i は $w, Kw, \dots, K^{l-1}w$ の1次結合でかける。

よって W はあるウェイトベクトルを含む。

No.

4 $U_q(sl_2(\mathbb{C}))$ の表現論(2)

<u>Def.</u> Aを代数、VをA加群すなわちAの表現空間とする。Vが完全可約とは、任意のA部分加群$W\subset V$が直和因子になることである。i.e. $\exists W'$; A部分加群 s.t. $V=W\oplus W'$

<u>Def.</u> Aをホップ代数、$\pi_i : A\to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ $(i=1,2)$ をその表現とする。このとき

$$A \xrightarrow{\Delta} A\otimes A \xrightarrow{\pi_1\otimes\pi_2} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_1)\otimes \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_2) \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_1\otimes V_2)$$

で得られる表現 $((\pi_1\otimes\pi_2)\circ\Delta,\ V_1\otimes V_2)$ を (π_i, V_i) のテンソル積表現とよぶ。

<u>Clebsch-Gordan の法則</u>

<u>Thm4.1.</u> qは1の巾根でないとすれば $l_1, l_2\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$V(l_1)\otimes V(l_2)\cong V(l_1+l_2)\oplus V(l_1+l_2-2)\oplus\cdots\oplus V(|l_1-l_2|)$$

<u>ex.</u> $l_1=1,\ l_2=1$ のとき $V(1)\otimes V(1)\cong V(2)\oplus V(0)$ が成り立つことを確認する。$V(1)=\mathbb{C}^2$、基底を $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$、$v_{-1}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とする。

$$X^+v_1=0,\quad X^+v_{-1}=v_1,\quad X^-v_1=v_{-1},\quad X^-v_{-1}=0$$
$$Kv_1=qv_1,\quad Kv_{-1}=q^{-1}v_{-1}$$

$V(1)\otimes V(1)$のベクトルuでまず$X^+u=0$となるベクトルuをみつける。

$$X^+u=\Delta(X^+)(v_1\otimes v_1)=X^+v_1\otimes v_1+Kv_1\otimes X^+v_1=0$$
$$X^-u=\Delta(X^-)(v_1\otimes v_1)=X^-v_1\otimes K^{-1}v_1+v_1\otimes X^-v_1=q^{-1}v_{-1}\otimes v_1+v_1\otimes v_{-1}$$
$$(X^-)^2u=(\Delta(X^-))^2(v_1\otimes v_1)=q^{-1}(X^-v_{-1}\otimes K^{-1}v_1+v_{-1}\otimes X^-v_1)+(X^-v_1\otimes K^{-1}v_{-1}+v_1\otimes X^-v_{-1})$$
$$=(q^{-1}+q)(v_{-1}\otimes v_{-1})$$
$$(X^-)^3u=(\Delta(X^-))^3(v_1\otimes v_1)=(q^{-1}+q)(X^-v_{-1}\otimes K^{-1}v_{-1}+v_{-1}\otimes X^-v_{-1})=0$$

よって $u_1=v_1\otimes v_1$, $u_2=q^{-1}v_{-1}\otimes v_1+v_1\otimes v_{-1}$, $u_3=v_{-1}\otimes v_{-1}$ とすれば Prop.3.7より

$$\underbrace{\mathbb{C}u_1\oplus\mathbb{C}u_2\oplus\mathbb{C}u_3}_{3次元}\cong V(2)$$

$V(l_1)\otimes V(l_1)$の次元は$2\times2=4$なので、もう1つウェイト0のベクトルu_4で$X^+u_4=0$となるものをみつける。$V(1)\otimes V(1)$の基底でウェイト0のものは$v_{-1}\otimes v_1$, $v_1\otimes v_{-1}$なので、$u_4=\alpha v_{-1}\otimes v_1+\beta v_1\otimes v_{-1}$とおける。

$$X^+u'=\Delta(X^+)(\alpha v_{-1}\otimes v_1+\beta v_1\otimes v_{-1})=\alpha X^+v_{-1}\otimes v_1+\beta Kv_1\otimes X^+v_{-1}=(\alpha+q\beta)(v_1\otimes v_1)$$

$\alpha=-q$, $\beta=1$とすればよい。$u_4=-qv_{-1}\otimes v_1+v_1\otimes v_{-1}$は$u_1,u_2,u_3$と一次独立で$X^-u_4=0$ $\quad \mathbb{C}u_4\cong V(0)$

$$\therefore V(1)\otimes V(1)\cong(\mathbb{C}u_1\oplus\mathbb{C}u_2\oplus\mathbb{C}u_3)\oplus\mathbb{C}u_4\cong V(2)\oplus V(0)$$

No.

Lemma 4.2. $C = \frac{qK-2+q^{-1}K^{-1}}{(q-q^{-1})^2} + X^-X^+ = \frac{q^{-1}K-2+qK^{-1}}{(q-q^{-1})^2} + X^+X^-$; カシミール元.

(1) V が最高ウェイト λ をもつ最高ウェイト加群ならば、C は V 上スカラーで作用し、

$$C = c(V)\times id_V, \quad c(V) = \left[\frac{\lambda+1}{2}\right]^2$$

(2) q が1の巾根でなければ、有限次元既約表現 V_1, V_2 に対して

$$V_1 \cong V_2 \iff c(V_1) = c(V_2)$$

∵ (1) 最高ウェイトベクトルを v とすれば. Prop 3.3 より

$$V = \bigoplus_{j\geq 0} \mathbb{C}(X^-)^j v$$

$$Cv = \left(\frac{qK-2+q^{-1}K^{-1}}{(q-q^{-1})^2} + X^-X^+\right)v = \left(\frac{q^{\frac{\lambda+1}{2}} - q^{-\frac{\lambda+1}{2}}}{q-q^{-1}}\right)^2 v = c(V)v$$

ここで

$$CX^- = \left(\frac{qK-2+q^{-1}K^{-1}}{(q-q^{-1})^2} + X^-X^+\right)X^- = \frac{q^{-1}X^-K-2X^-+qX^-K^{-1}}{(q-q^{-1})^2} + X^-X^+X^-$$

$$= X^-\left(\frac{q^{-1}K-2+qK^{-1}}{(q-q^{-1})^2} + X^+X^-\right) = X^-C$$

で X^- と C は可換なので. C は V 上スカラーで作用する.

(2) (⇒) 明らか.

(⇐) Thm 3.8 より V_i には最高ウェイトベクトル v_i が存在する.

$Kv_i = w_i q^{l_i} v_i$ とする ここで $l_i+1 = \dim V_i$, $w_i^2 = 1$ (ねじれ) である. $c(V_1) = c(V_2)$ ならば

$$\frac{w_1 q^{l_1+1} - 2 + w_1^{-1} q^{-l_1-1}}{(q-q^{-1})^2} = \frac{w_2 q^{l_2+1} - 2 + w_2^{-1} q^{-l_2-1}}{(q-q^{-1})^2}$$

$$w_1 q^{l_1+1} + w_1^{-1} q^{-l_1-1} - w_2 q^{l_2+1} - w_2^{-1} q^{-l_2-1} = 0$$

$$w_1 q^{l_1+1} - w_2 q^{l_2+1} - w_1^2 w_2 q^{-l_2-1} + w_2^2 w_1 q^{-l_1-1} = 0 \quad (\because w_i^2 = 1)$$

$$(w_1 q^{l_1+1} - w_2 q^{l_2+1})(1 - w_1 w_2 q^{-l_1-l_2-1}) = 0$$

ここで $l_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で q は1の巾根でないから.

$$w_1 q^{l_1+1} = w_2 q^{l_2+1}$$

$$\therefore w_1 = w_2 \text{ かつ } l_1 = l_2$$

Prop 3.7 より $V_1 \cong V_2$ //