Thm 4.1 の Proof.

各 $s=0,1,\cdots,\min(l_1,l_2)$ ごとにウェイト l_1+l_2-2s の最高ウェイトベクトル $W^{(s)}\in V(l_1)\otimes V(l_2)$ を具体的に構成する。
$V(l_i)$ の基底をそれぞれ $\{v'_{l_1-2j}\}$, $\{v''_{l_2-2j}\}$ とする。

$$v'_{l_1-2j}=\frac{(X^-)^j}{[j]!}v'_{l_1}\ ,\quad v''_{l_2-2j}=\frac{(X^-)^j}{[j]!}v''_{l_2}$$

$$W^{(s)}=\sum_{0\le j\le s}C_j\,v'_{l_1-2j}\otimes v''_{l_2-2(s-j)}$$

とおける。条件 $0=X^+W^{(s)}$ を書き下せば、

$$0=\sum_{0\le j\le s}C_j\left(X^+v'_{l_1-2j}\otimes v''_{l_2-2(s-j)}+Kv'_{l_1-2j}\otimes X^+v''_{l_2-2(s-j)}\right)$$

$$=\sum_{1\le j\le s}C_j[l_1-j+1]\,v'_{l_1-2(j-1)}\otimes v''_{l_2-2(s-j)}\qquad(\because \text{Prop 3.7})$$

$$+\sum_{0\le j\le s-1}C_j\,q^{l_1-2j}[l_2-(s-j)+1]\,v'_{l_1-2j}\otimes v''_{l_2-2(s-j-1)}$$

$$=\sum_{0\le j\le s-1}\left(C_{j+1}[l_1-j]+C_j\,q^{l_1-2j}[l_2-(s-j)+1]\right)v'_{l_1-2j}\otimes v''_{l_2-2(s-j-1)}$$

$$\therefore\ C_{j+1}=-\frac{[l_2-s+j+1]}{[l_1-j]}\,q^{l_1-2j}\,C_j$$

$C_0=\begin{bmatrix}l_1\\ s\end{bmatrix}$ とすれば、

$$W^{(s)}=\sum_{0\le j\le s}(-1)^j q^{j(l_1-j+1)}\begin{bmatrix}s\\ j\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}l_1-j\\ s-j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_2-s+j\\ j\end{bmatrix}v'_{l_1-2j}\otimes v''_{l_2-2(s-j)}$$

Prop 3.7 より $\mathcal{W}^{(s)}=U_q\cdot W^{(s)}\cong V(l_1+l_2-2s)$
Lemma 4.2 より $C(W^{(s)})$ の値は s ごとに異なるので $\sum_{0\le s\le\min(l_1,l_2)}\mathcal{W}^{(s)}$ は直和である。

$$\bigoplus_{0\le s\le\min(l_1,l_2)}\mathcal{W}^{(s)}\subset V(l_1)\otimes V(l_2)$$

で次元を比べて $\bigoplus_{0\le s\le\min(l_1,l_2)}\mathcal{W}^{(s)}=V(l_1)\otimes V(l_2)$ を得る。

完全可約性

Thm 4.3. q が1の巾根でないとき、U_q の有限次元表現はすべて完全可約である。

Proof. V を有限次元 U_q 加群、W を V の 0 でない真部分加群とし、W が直和因子になることを示す。

(case.1) $\mathrm{codim}_V W = 1$ かつ $\dim W = 1$ のとき
$1 = \dim V/W = \dim V - \dim W = \dim V - 1$, $W = \mathbb{C}v_1$ とすれば $V = \mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}v_2$ となる v_2 が存在する。$W' = \mathbb{C}v_2$ が U_q 部分加群となることを示す。
V/W は1次元加群なので $Kv_2 = w_2 v_2 + a v_1$, $X^\pm v_2 = b_\pm v_1$ ($a, b_\pm \in \mathbb{C}$) とおける。
$KX^\pm v$ を計算して $b_\pm = 0$.

(Case 2) $\mathrm{codim}_V W = 1$ かつ W が既約でないとき。$\dim W$ の帰納法で示す。
0 でない U_q-真部分加群 $W' \subset W$ がとれて、
$1 = \dim V/W = \dim (V/W')/(W/W')$ （∵第3同型定理） で
$\dim W/W' = \dim W - \dim W' < \dim W$ なので帰納法の仮定より、
V の U_q-部分加群 $\tilde{W}$ をとって $V/W' = W/W' \oplus \tilde{W}/W'$ とすることができる。

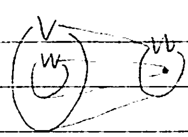
$$\dim V/W' = \dim W/W' + \dim \tilde{W}/W'$$
$$\dim V - \dim W' = \dim W - \dim W' + \dim \tilde{W}/W'$$
$$\mathrm{codim}_{W'} \tilde{W} = \dim \tilde{W}/W' = \dim V - \dim W = \dim V/W = 1$$

であり $\dim W' < \dim W$ なので帰納法の仮定より
$\tilde{W} = W' \oplus W''$ となる U_q-部分加群 $W'' \subset \tilde{W}$ がとれる。

$$V = W + \tilde{W} = W + (W' \oplus W'') = W \oplus W''$$
（∵ $W \cap W'' = 0$）

(case 3) 一般の場合。
$\mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V,W)$ に U_q-加群の構造を次のように入れる。
$$U_q \times \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V,W) \to \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V,W)\ ;\ (X,f) \mapsto Xf$$
$\Delta(X) = \sum X_i' \otimes X_i''$ として、$Xf = \sum \pi(X_i') \circ f \circ \pi(S(X_i''))$

$$\mathcal{V} = \{f \in \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V,W) \mid f|_W \in \mathbb{C}\cdot id\}$$
$$\mathcal{W} = \{f \in \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V,W) \mid f|_W = 0\}$$



とおけば、これらは U_q-部分加群となっている。
$F \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{W}$ を1つとる。$\exists a \in \mathbb{C}^\times$ s.t. $F = a\cdot id$
$\forall f \in \mathcal{V}$ に対して $\exists b \in \mathbb{C}$ s.t. $f = b\cdot id$
$f - \frac{b}{a}F \in \mathcal{W}$ であるから、
$\mathrm{codim}_\mathcal{W} \mathcal{V} = \dim \mathcal{V}/\mathcal{W} = 1$ なので case.1,2より U_q 加群の分解として
$$\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathbb{C}f$$
を与える $f \in \mathcal{V}$ がとれる。一般性を失なわずに $f|_W = id$ としてよい。
$\mathrm{Im} f = W$ なので $f \circ f = f$ で巾等変換。よって $W' = \mathrm{Ker} f$ とすれば
$$V = W \oplus W'$$

No.

$\mathrm{Ker}\, f$ が U_q-加群となることは、$\mathbb{C}$, f が U_q-加群であることから分かる。

(case. 4) $\mathrm{codim}_V W = 1$ かつ W が既約で $\dim W \geq 2$ のとき

$$0 \Rightarrow \underbrace{W}_{\text{既約}} \rightarrow V \rightarrow \underbrace{V/W}_{\text{既約}} \rightarrow 0$$

$C(W) \neq C(V/W)$ で W, V/W は既約なので Lemma 4.2 より同型ではなく、$\mathrm{Ker}\,(C - c(V/W)) \cap W = 0$

C は U_q の中心に属する。$W' = \mathrm{Ker}\,(C - c(V/W))$ は 0 でない U_q-部分加群となり、$\mathrm{codim}_V W = 1$ より $V = W \oplus W'$